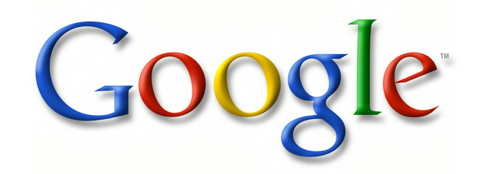


§. 1.

Zusammenhang der Umformung einer binären Form f sechsten Grades in die Form $v^2 - u^3$ mit der Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen ($p = 2$).

Die Normalcurven der hyperelliptischen Functionen ($p = 2$) sind Curven vierter Ordnung mit einem Doppelpuncte. Die Gleichung einer solchen Curve lässt sich immer in die Form bringen:

1) . . . . . . $z^2 \varphi(x,y) = \psi(x,y)$,

wo φ eine homogene Function zweiter Ordnung, ψ eine solche vierter Ordnung von x und y ist. Der Doppelpunct tritt bei $x = 0$, $y = 0$ ein; seine Tangenten fallen nicht zusammen. Die hyperelliptischen Integrale erster Gattung, auf welche die Gleichung 1. führt, sind von der Form

$$s = \int \frac{(\alpha x + \beta y)(x\,dy - y\,dx)}{\sqrt{\varphi . \psi}}$$
$$t = \int \frac{(\alpha' x + b' y)(x\,dy - y\,dx)}{\sqrt{\varphi . \psi}};$$

Der Ausdruck $\varphi . \psi$ unter dem Wurzelzeichen ist eine Function sechsten Grades, welche durch

$$f = \varphi . \psi$$

bezeichnet werden soll. Die Integrale sind von beliebig fixirten untern Grenzen x_0, y_0 mit bestimmten Vorzeichen von $\sqrt{\varphi_0 \psi_0}$ bis zu einem variabeln Werthepaar x, y zu nehmen.

Bezeichnen wir Integrale mit andern obern Grenzen durch hinzugefügte Striche, so ist das Umkehrproblem der hyperelliptischen Functionen durch die Gleichungen gegeben:

$$s + s' = \sigma$$
$$t + t' = \tau.$$

Es sei nun v eine noch unbestimmte homogene Function dritten Grades von x und y; die Gleichung

2) . . . . $z . \varphi = v$

stellt dann eine Curve dritter Ordnung dar, welche ebenfalls im Puncte $x = 0$, $y = 0$ einen Doppelpunct hat, und zwar einen solchen, welcher

dieselben Tangenten wie der Doppelpunct der Curve 1. besitzt. Von den zwölf Schnittpunkten der Curven 1. und 2. fallen daher sechs in diesen Punct, die übrigen erhält man aus der Gleichung sechsten Grades

$$3) \quad \ldots\ldots \quad v^2 = z^2\varphi^2 = \varphi . \psi = f.$$

Für die hyperelliptischen Integrale, welche diesen Schnittpuncten entsprechen, gelten nun nach dem Abelschen Theoreme die Gleichungen:

$$4) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} s^{(1)} + s^{(2)} \ldots + s^{(6)} = c \\ t^{(1)} + t^{(2)} \ldots + t^{(6)} = \gamma, \end{cases}$$

wo c und γ Constanten bedeuten, welche von den Constanten der Function v unabhängig sind. Aus diesen Gleichungen sind zwei Schnittpuncte durch die übrigen bestimmt.

Suchen wir aber insbesondere diejenigen Curven 2., welche die gegebene Curve in zwei verschiedenen Puncten dreipunctig berühren. Für solche muss die Gleichung 3. zweimal drei gleiche Wurzeln aufweisen; es muss also identisch

$$v^2 = f + u^3$$

werden, wo u eine quadratische Function von x, y ist, oder was dasselbe ist, die Function f muss in die Form

$$f = v^2 - u^3$$

gebracht werden können; jeder Art, die Function f in dieser Form darzustellen, entspricht eine Berührungscurve der gesuchten Art, oder vielmehr deren zwei, welche durch die Gleichungen

$$z\varphi - v = 0, \quad z\varphi + v = 0$$

gegeben sind.

Zugleich werden in den Gleichungen 4. zweimal drei der obern Argumente einander gleich, und dieselben gehen über in

$$5) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} 3\,(s^{(1)} + s^{(2)}) = c \\ 3\,(t^{(1)} + t^{(2)}) = \gamma. \end{cases}$$

Aber die Gleichung 2. wird offenbar auch in der hier verlangten Weise befriedigt durch eine uneigentliche Curve dritter Ordnung, welche aus einer dreifach zu zählenden, durch den Doppelpunct gehenden Gera-

den besteht. Mag irgend eine Linie dieser Art die gegebene Curve in zwei Puncten schneiden, denen die Integrale $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ entsprechen; man hat dann auch

$$3(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) = c$$
$$3(\tau^{(1)} + \tau^{(2)}) = \gamma;$$

und daher endlich an Stelle der Gleichungen 5. folgende:

$$6) \quad \ldots \quad \begin{cases} 3(s^{(1)} + s^{(2)}) = 3(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) \\ 3(t^{(1)} + t^{(2)}) = 3(\tau^{(1)} + \tau^{(2)}). \end{cases}$$

Diese Gleichungen brauchen nur bis auf Perioden der Integrale erster Gattung zu bestehen; sind P, Q solche zusammengehörige Perioden, so kann man den Gleichungen 6. auch die Form geben:

$$s^{(1)} + s^{(2)} = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \frac{P}{3}$$
$$t^{(1)} + t^{(2)} = \tau^{(1)} + \tau^{(2)} + \frac{Q}{3}.$$

In dieser Gleichung drückt sich das Problem der speciellen Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen aus (vergl. Clebsch und Gordan, Theorie der Abelschen Functionen, p. 235 folg.). Für $P = 0$, $Q = 0$ ist die Lösung des in diesen Gleichungen enthaltenen Umkehrproblems bekannt; sie entspricht der eben angedeuteten uneigentlichen und zugleich unbestimmten Lösung der Aufgabe. Es bleiben noch $3^4 - 1 = 80$ eigentliche Lösungen übrig, welche den verschiedenen Arten entsprechen, die Function auf die Form $v^2 - u^3$ zu bringen. Aber von diesen 80 Lösungen stehen immer zwei in solcher Beziehung zu einander, dass wenn die eine auf v führt, die andere $-v$ ergiebt. In der That, betrachten wir zwei Lösungen, welche sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass die Perioden P, Q der einen denen der andern entgegengesetzt sind (oder, was hier dasselbe ist, das Doppelte derselben). Bezeichnen wir die der einen zugehörigen Integrale durch die Indices 1, 2, die der andern durch 3, 4, so ist

$$s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)} + s^{(4)} + \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} = 3(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) = c$$
$$t^{(1)} + t^{(2)} + t^{(3)} + t^{(4)} + \tau^{(1)} + \tau^{(2)} = 3(\tau^{(1)} + \tau^{(2)}) = \gamma.$$

Die Berührungspuncte der benutzten beiden Berührungscurven lie-

gen also mit den Puncten, in welchen eine beliebig durch den Doppelpunct gezogene Gerade schneidet, in einer solchen Curve 2., wie sie bei der Ableitung von 4. vorausgesetzt wurde. Aber diese Curve dritter Ordnung wird von der beliebig durch den Doppelpunct gelegten Geraden in vier Puncten geschnitten, besteht also aus ihr und einem Kegelschnitt; dieser endlich muss die gegebene Curve im Doppelpuncte noch viermal schneiden, also in ihm selbst einen Doppelpunct besitzen, also in zwei Gerade zerfallen. Daher liegen die Berührungspuncte der einen Berührungscurve mit denen der andern auf zwei durch den Doppelpunct gehenden Geraden; die Gleichung $v^2 - f = 0$ muss für beide dieselben Wurzeln liefern, d. h. die beiden v können sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Zwei solche Lösungen führen also auf dieselbe Transformation von f.

§. 2.

Gruppirung der Lösungen des vorgelegten Problems, wenn eine derselben gegeben ist. Lösungen erster und zweiter Classe. Hülfsproblem.

Um die verschiedenen Lösungen der Aufgabe, die Function f in der Form $v^2 - u^3$ zu bringen, untersuchen zu können, nehme ich an, eine dieser Transformationen sei bekannt, die Function f also schon in der Form $v^2 - u^3$ gegeben, und es handle sich darum, sie auf andere Weise in dieselbe Form, $v'^2 - u'^3$ zu bringen. Man hat dann identisch die Gleichung zu erfüllen

$$v^2 - u^3 = v'^2 - u'^3.$$

Diese Gleichung kann man auch in der Form schreiben:

$$v^2 - v'^2 = u^3 - u'^3,$$

oder endlich

$$(v + v')(v - v') = (u - u')(u - \varepsilon u')(u - \varepsilon^2 u'),$$

wo ε eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit ist.

Man bemerkt sofort, dass diese Gleichung auf zwei ganz verschiedene Arten erfüllt werden kann, und *dass also alle übrigen Lösungen der Aufgabe sich in Bezug auf eine derselben in zwei Gruppen sondern.*

Im ersten Falle enthält jeder der beiden cubischen Factoren

$$v+v', \quad v-v'$$

einen der drei quadratischen Factoren

$$u-u', \quad u-\varepsilon u', \quad u-\varepsilon^2 u'$$

ganz; im zweiten Falle hat jeder der erstern mit jedem der letzteren Factoren nur einen linearen Factor gemeinsam. Die Lösungen u', v' sollen, je nachdem eins oder das andere eintritt, *Lösungen erster oder zweiter Classe in Bezug auf eine gegebene Lösung* u, v genannt werden.

Untersuchen wir den ersten Fall. Es ist offenbar ganz gleichgültig, wie wir die beiden ersten Factoren den drei andern zuordnen. Denn v', u' sind nicht völlig bestimmt, sondern ersteres nur bis auf das Vorzeichen, letzteres bis auf eine dritte Wurzel der Einheit. Aendert man aber diese, so gehen die obigen Factoren in jeder Weise in einander über, und man kann also durch Bestimmung dieser willkürlichen Elemente jene Factoren beliebig einander zuordnen.

Seien daher $u-\varepsilon u'$ und $u-\varepsilon^2 u'$ die beiden quadratischen Factoren, welche in den cubischen ganz enthalten sein sollen. Indem man die linearen Factoren, welche noch hinzutreten müssen, beziehungsweise durch $\xi-\varepsilon\eta$, $\xi-\varepsilon^2\eta$ bezeichnet, erhält man die Gleichungen:

$$7) \quad \ldots \quad \begin{cases} v+v' = (\xi-\varepsilon\eta)(u-\varepsilon u') \\ v-v' = (\xi-\varepsilon^2\eta)(u-\varepsilon^2 u'); \end{cases}$$

die Gleichung

$$v^2-v'^2 = u^3-u'^3$$

aber geht mit Benutzung der Gleichungen 7. über in:

$$8) \quad \ldots \quad u-u' = (\xi-\varepsilon\eta)(\xi-\varepsilon^2\eta).$$

Die drei Gleichungen 7. 8. dienen zur Bestimmung von u', v', ξ, η. In der That stellen sie, indem man die Coefficienten der verschiedenen Potenzen der Variabeln, die jetzt x_1, x_2 heissen mögen, gleich Null setzt, 11 Gleichungen dar, in welchen ebensoviele Unbekannte auftreten.

Man kann die Gleichungen 7. 8. aber sofort nach u', v', v auflösen und erhält dann

$$9) \quad . \quad . \quad \begin{cases} u' = u - \xi^2 - \xi\eta - \eta^2 \\ 2v' = \varepsilon(\varepsilon - 1)[(\xi + 2\eta)u - (\xi + \eta)(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2)] \\ 2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^3. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen geben die ersten beiden die gesuchte neue Lösung, wenn man die linearen Ausdrücke ξ, η als gefunden voraussetzt. Die letzte aber liefert die Mittel zur Bestimmung dieser Ausdrücke selbst. Sie führt auf ein neues Transformationsproblem, welches für die erste Classe der gesuchten Lösungen characteristisch ist.

Bemerken wir nur einstweilen, *dass jeder Lösung* ξ, η *der dritten Gleichung* 9. *drei Lösungen der gegebenen Aufgabe entsprechen.* Denn die letzte Gleichung 9. enthält nur den Cubus von η; diese Function ist also nur bis auf eine dritte Wurzel der Einheit bestimmt; indem man diese aber ändert, ändert sich auch das System u', v'. Wir wollen drei so zusammengehörige Lösungen u', v' ein *Tripel* nennen. Es wird sich zeigen, dass die Lösungen erster Classe aus neun Tripeln bestehen, denn die dritte Gleichung 9. führt auf eine Gleichung neunten Grades. Es mag gleich bemerkt werden, dass diese Gleichung neunten Grades eine *Hessesche* ist.

Das Problem auf welcher wir so die Lösungen erster Classe zurückgeführt haben, ist folgendes:

Problem.

Gegeben sind zwei binäre Formen, u vom zweiten, v vom dritten Grade; man soll zwei lineare Ausdrücke ξ und η so bestimmen, dass identisch

$$10) \quad . \quad . \quad . \quad 2v = 3\xi u - \xi^3 + \eta^3;$$

oder auch, es soll eine lineare Function ξ so bestimmt werden, dass der Ausdruck $2v - 3\xi u + \xi^3$ ein vollständiger Cubus ist.

Vergleichen wir auf beiden Seiten der Gleichung 10. die Coefficienten, so erhalten wir vier Gleichungen mit den vier unbekannten Coefficienten von ξ und η; in der That wird sich zeigen, dass die Aufgabe vollkommen bestimmt ist. Ich wende mich zunächst zur Aufstellung einer Gleichung neunten Grades, von welcher das Problem abhängt. Vorher aber wird es zweckmässig sein, einiges vorauszuschicken, was das simultane Formensystem von u und v betrifft

§. 3.

Das simultane Formensystem von u und v.

Ich werde im Folgenden die algebraischen Formen, welche aus dem System der Formen u und v entspringen, fast sämmtlich benutzen. Betrachtungen, wie sie Hr. Gordan Bd. I p. 90 der mathematischen Annalen und im 69. Bande des Borchardtschen Journals angestellt hat, lehren, dass alle Formen des Systems sich als ganze Functionen der folgenden 15 ausdrücken lassen, unter welchen u und v mit inbegriffen sind:

			Ordnung in u, v, x.
1)	v	$= \alpha_x^3 = \beta_x^3$	0, 1, 3
2)	τ	$= (\alpha\beta)^2 \alpha_x \beta_x = \tau_x^2$	0, 2, 2
3)	ω	$= (\tau\alpha)\alpha_x^2 \tau_x = \omega_x^3$	0, 3, 3
4)	$A_{\tau\tau}$	$= (\tau\tau')^2$	0, 4, 0
5)	u	$= a_x^2 = b_x^2$	1, 0, 2
6)	ϑ	$= (a\alpha)\alpha_x^2 a_x$	1, 1, 3
7)	p	$= (a\alpha)^2 \alpha_x$	1, 1, 1
8)	ρ	$= (a\tau) a_x \tau_x$	1, 2, 2
9)	$A_{u\tau}$	$= (a\tau)^2$	1, 2, 0
10)	r	$= (a\omega)^2 \omega_x$	1, 3, 1
11)	A_{uu}	$= (ab)^2$	2, 0, 0
12)	q	$= (ap) a_x$	2, 1, 1
13)	s	$= (\alpha p)^2 \alpha_x$	2, 3, 1
14)	$A_{u,pp}$	$= (ap)^2$	3, 2, 0
15)	M	$= (\alpha p)^3$	3, 4, 0.

Die Anordnung dieser Tafel ist die, dass zunächst nach der Ordnung in den Coefficienten von u, dann innerhalb dieser Gruppen nach den Coefficienten von v, und endlich innerhalb der letzten so geordnet ist, dass höhere Formen in den x den niederen vorangehen. Was die Bezeichnung der Invarianten angeht, so ist dieselbe so gewählt, dass die Invariante zweier quadratischen Formen, φ, ψ, welche die Coefficienten beider linear enthält, durch $A_{\varphi,\psi}$ bezeichnet ist.

Unter den vorstehenden Formen findet man

5 Invarianten, darunter eine alternirende (gauche),
4 lineare Formen, darunter zwei alternirende,
3 quadratische Formen, darunter eine alternirende,
3 cubische Formen, darunter zwei alternirende.

Da die Producte und Quadrate alternirender Formen immer durch directe Formen ausdrückbar sind, so hat also jede Form des Systems die Gestalt

$$A + B\omega + C\vartheta + D\rho + Er + Fq + GM,$$

wo A, B, C, D, E, F, G ganze Functionen von v, u, τ, p, s und den vier directen Invarianten sind. Unter den Ausdrücken, welche die Quadrate und Producte alternirender Covarianten annehmen, hebe ich folgende hervor, welche weiterhin benutzt werden:

$$\text{I.} \quad \ldots \quad \begin{cases} \vartheta^2 = -\frac{1}{2}(v^2 A_{uu} - 2uvp + u^2\tau) \\ \vartheta\omega = \frac{1}{2}(\tau vp - \tau^2 u - v^2 A_{u\tau}) \\ \vartheta\rho = \frac{1}{2}(\tau pu + vuA_{u\tau} - \tau v A_{uu}) \\ \rho^2 = vs - \frac{1}{2}\tau p^2. \end{cases}$$

Ausserdem gibt es noch eine grosse Anzahl von Formeln, in welchen lineare Verbindungen der alternirenden Formen gleich Null gefunden werden, in deren Coefficienten nur directe Formen auftreten. Von solchen Formeln bemerke ich die folgende:

$$\text{II.} \quad \ldots \quad \tau\vartheta - u\omega = v\rho.$$

Endlich hebe ich noch folgende zwischen directen Formen stattfindende Gleichungen hervor:

$$\text{III.} \quad \ldots \quad \begin{cases} us = vA_{u,pp} - p(uA_{u\tau} - \tau A_{uu}) - p^3 \\ \tau s = vA_{\tau,pp} - p(uA_{\tau\tau} - \tau A_{u\tau}) \\ A_{\tau,pp} = \frac{1}{2}(A_{uu}A_{\tau\tau} - A^2_{u\tau}) \end{cases}$$

Alle diese Formeln sind entweder bekannt, oder so leicht zu beweisen, dass ich den Beweis hier übergehen kann.

§. 4.

Aufstellung der Gleichung neunten Grades, von welcher das Hülfsproblem abhängt.

Die zu lösende Aufgabe besteht in der Auffindung zweier linearen Functionen ξ, η, vermittelst deren die Gleichung

$$1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^3$$

befriedigt wird. Statt nun die Coefficienten der x auf beiden Seiten zu vergleichen, führe ich ξ und η selbst erst als Variable ein und vergleiche dann die Coefficienten. Es ist identisch:

$$(\xi\eta)^3 v = (\xi\eta)^3 a_x^3 = [(a\eta)\xi_x - (a\xi)\eta_x]^3$$
$$(\xi\eta)^2 u = (\xi\eta)^2 a_x^2 = [(a\eta)\xi_x - (a\xi)\eta_x]^2.$$

Setzt man dies in die Gleichung 1. ein, und vergleicht die Coefficienten gleicher Potenzen von ξ und η, so erhält man:

$$2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} 2(a\eta)^3 = 3(\xi\eta)(a\eta)^2 - (\xi\eta)^3 \\ -6(a\eta)^2(a\xi) = -6(\xi\eta)(a\eta)(a\xi) \\ 6(a\eta)(a\xi)^2 = 3(\xi\eta)(a\xi)^2 \\ -2(a\xi)^3 = (\xi\eta)^3. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen sind die ξ, η zu bestimmen. Ich werde zunächst die η eliminiren, und sodann eine Gleichung herstellen, welche nur noch den Quotienten $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ enthält. Um das erste zu erreichen, braucht man nur zu bemerken, dass aus der dritten Gleichung 2) sofort folgt:

$$3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{aligned} \varkappa\eta_1 &= 2(a\xi)^2 a_1 - (a\xi)^2\xi_1 \\ \varkappa\eta_2 &= 2(a\xi)^2 a_2 - (a\xi)^2\xi_2, \end{aligned}$$

wo $\varkappa$ ein noch unbestimmter Factor ist. Aus diesen Gleichungen folgt

$$\varkappa(\xi\eta) = -2(a\xi)^3,$$

und dieses in Verbindung mit der letzten Gleichung 2) liefert zur Bestimmung von $\varkappa$ die Gleichung

$$4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varkappa^3 = 4(a\xi)^3 \cdot (\beta\xi)^3.$$

Wenn also die ξ bestimmt sind, so sind durch 3. 4. die η bis auf dritte Wurzeln der Einheit gegeben. Dass sie weiter nicht bestimmt sind, erklärt sich dadurch, dass auch in 1. nur η^3 vorkommt.

Von den Gleichungen 2. bleiben nun die ersten beiden übrig, welche, wenn man die Verhältnisse der η den Gleichungen 3. entnimmt, in Gleichungen zwischen den ξ allein übergehn. Um dieselben abzuleiten, betrachte ich zunächst die Ausdrücke $(a\xi)(a\eta)$, $(a\eta)^2$, $(\alpha\xi)(\alpha\eta)^2$, $(\alpha\eta)^3$, welche durch Einführung der Werthe der η in folgende übergehen:

$$5)\begin{cases} \varkappa(a\xi)(a\eta) = 2(a\alpha)(\alpha\xi)^2(a\xi) - (a\xi)^2(b\xi)^2 \\ \varkappa^2(a\eta)^2 = 4(a\alpha)(a\beta)(\alpha\xi)^2(\beta\xi)^2 - 4(a\alpha)(a\xi)(\alpha\xi)^2(b\xi)^2 + (a\xi)^2(b\xi)^2(c\xi)^2 \\ \varkappa^2(\alpha\xi)(\alpha\eta)^2 = 4(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\alpha\xi)(\beta\xi)^2(\gamma\xi)^2 - 4(\alpha\beta)(\alpha\xi)^2(\beta\xi)^2(a\xi)^2 + (\alpha\xi)^3(a\xi)^2(b\xi)^2 \\ \varkappa^3(\alpha\eta)^3 = 8(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\alpha\delta)(\beta\xi)^2(\gamma\xi)^2(\delta\xi)^2 - 12(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\alpha\xi)(\beta\xi)^2(\gamma\xi)^2(a\xi)^2 \\ \qquad + 6(\alpha\beta)(\alpha\xi)^2(\beta\xi)^2(a\xi)^2(b\xi)^2 - (\alpha\xi)^3(a\xi)^2(b\xi)^2(c\xi)^2. \end{cases}$$

Im Folgenden werden die dem Systeme von u, v angehörigen Formen nur gebraucht werden, indem $x_1 = \xi_2, x_2 = -\xi_1$ gesetzt wird. Daher werde ich hier zunächst die verschiedenen oben eingeführten Bezeichnungen der Formen in diesem Sinne brauchen, so dass v für $(\alpha\xi)^3$, u für $(a\xi)^2$ gesetzt wird, u. s. w. Die Gleichung 4. liefert dann z. B.

$$6) \quad \ldots \quad \varkappa^3 = 4v^2,$$

die erste Gleichung 5. verwandelt sich in

$$7) \quad \ldots \quad \varkappa(a\xi)(a\eta) = 2\vartheta - u^2.$$

Um die zweite Gleichung 5. zu behandeln, bemerke ich zunächst, dass aus der Identität

$$(a\alpha)(\beta\xi) - (a\beta)(\alpha\xi) = -(\alpha\beta)(a\xi)$$

durch Quadriren folgt:

$$(a\alpha)(a\beta)(\beta\xi)(\alpha\xi) = \tfrac{1}{2}[(a\alpha)^2(\beta\xi)^2 + (a\beta)^2(\alpha\xi)^2 - (\alpha\beta)^2(a\xi)^2].$$

Daher wird das erste Glied der rechten Seite der 2. Gleichung 5.:

$$(a\alpha)(a\beta)(\alpha\xi)^2(\beta\xi)^2 = pv - \tfrac{1}{2}\tau u,$$

und jene Gleichung geht über in:

$$8) \quad \ldots \quad \varkappa^2(a\eta)^2 = 4pv - 2\tau u - 4\vartheta u + u^3.$$

In der dritten Gleichung 5. verschwindet das zweite Glied identisch, weil es durch die nichts ändernde Vertauschung von α mit β sein Zeichen wechselt; für das erste Glied liefert die Identität

$$(\alpha\beta)(\gamma\xi)-(\alpha\gamma)(\beta\xi)=-(\beta\gamma)(\alpha\xi)$$

durch Quadriren:

$$(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\xi)(\gamma\xi)=\tfrac{1}{2}[(\alpha\beta)^2(\gamma\xi)^2+(\gamma\alpha)^2(\beta\xi)^2-(\beta\gamma)^2(\alpha\xi)^2],$$

und man hat daher

$$(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\xi)^2(\gamma\xi)^2(\alpha\xi)=\tfrac{1}{2}\tau v,$$

so dass die dritte Gleichung 5. sich verwandelt in:

$$9)\quad\ldots\quad \varkappa^2(\alpha\xi)(\alpha\eta)^2=v(2\tau+u^3).$$

Endlich giebt dieselbe Identität, welche eben benutzt wurde:

$$(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\alpha\delta)(\beta\xi)^2(\gamma\xi)^2(\delta\xi)^2=(\tau\delta)(\delta\xi)^2(\tau\xi).v=v\omega,$$

und die vierte Gleichung 5. verwandelt sich also in

$$10)\quad\ldots\quad \varkappa^3(\alpha\eta)^3=v(8\omega-6\tau u-u^3).$$

Mit Hülfe der Gleichungen 7—10. erhält man nun, indem man die Verhältnisse der η aus 3. in die ersten beiden Gleichungen 2. einführt, die folgenden Gleichungen:

$$11)\quad\ldots\quad \begin{cases}0=4\omega-6u\tau+6vp-6\vartheta u+u^3-2v^2\\0=2\tau+4\vartheta-u^2,\end{cases}$$

wobei nur der überflüssige Factor v ausgelassen ist.

Die beiden Gleichungen 11. sind *nicht homogene* Gleichungen in ξ_1, ξ_2; aus denselben soll nunmehr eine einzige abgeleitet werden, welche in diesen Grössen homogen ist. Zu diesem Zwecke setze ich $\frac{\xi_1}{\lambda}$, $\frac{\xi_2}{\lambda}$ an Stelle von ξ_1, ξ_2; dann nehmen die Gleichungen 11. die Form an:

$$12)\quad\ldots\quad \begin{cases}0=4\omega\lambda^3-6u\tau\lambda^2+6vp\lambda^2-6\vartheta u\lambda+u^3-2v^2\\0=2\tau\lambda^2+4\vartheta\lambda-u^2,\end{cases}$$

und die gesuchte Gleichung wird aus diesen beiden erhalten, indem man λ eliminirt.

Die erste Gleichung 12. vereinfacht sich in etwas, wenn man sie mit 2 multiplicirt und die zweite mit $3u$ multiplicirt hinzufügt; sie geht dann über in:

$$13)\quad\ldots\quad 0=8\omega\lambda^3+(12vp-6u\tau)\lambda^2-(u^3+4v^2)$$

Ich bilde jetzt aus dieser und der zweiten Gleichung 12. die Functionaldeterminante nach λ und $\frac{1}{\lambda}$, welche ebenfalls verschwinden muss:

$$0 = \begin{vmatrix} 8\omega\lambda^2 + (8vp - 4u\tau)\lambda & 2\tau\lambda + 2\vartheta \\ (4vp - 2u\tau)\lambda^2 - u^3 - 4v^2 & 2\vartheta\lambda - u^2 \end{vmatrix},$$

oder, wenn man durch 2 dividirt:

$$0 = \lambda^3(8\omega\vartheta - 4\tau vp + 2\tau^2 u) + \lambda^2(4\vartheta vp - 2\vartheta u\tau - 4u^2\omega) + \lambda(\tau u^3 + 4\tau v^2 - 4u^2 vp + 2u^3\tau) + \vartheta(u^3 + 4v^2).$$

Zieht man hiervon die Gleichung 13. mit ϑ multiplicirt ab, und addirt die zweite Gleichung 12. mit $\lambda(2p - u\tau) + 2\vartheta u$ multiplicirt, so bleibt die für λ *quadratische* Gleichung übrig:

14) . $0 = 4\lambda^2 u(\tau\vartheta - u\omega) + \lambda(4\tau v^2 + \tau u^3 - 6u^2 vp - 3u\tau + 8u\vartheta^2) + 8\vartheta v^2.$

Diese Gleichung enthält den überflüssigen Factor v. Denn nach I. II. ist

$$\tau\vartheta - u\omega = \rho v$$
$$\vartheta^2 = -\tfrac{1}{2}(\tau u^2 - 2uvp + A_{uu}v^2),$$

und indem man dies einsetzt, und durch v dividirt, bleibt übrig:

15) . . $0 = 4\lambda^2 u\rho + \lambda(4\tau v - 4uvA_{uu} + 2u^2 p) + 8\vartheta v.$

Zu dieser und der zweiten Gleichung 12. kann man als dritte Gleichung zweiten Grades diejenige hinzufügen, welche entsteht, wenn man aus 13. und der zweiten Gleichung 12. den höchsten Term eliminirt:

$$0 = (12vp\tau - 6u\tau^2 - 16\omega\vartheta)\lambda^2 + 4\omega u^2\lambda - \tau(u^3 + 4v^2).$$

Zieht man hievon noch die zweite Gleichung 12., mit $u\tau$ multiplicirt, ab, so bleibt nach Division mit 4:

$$0 = (3vp\tau - 2u\tau^2 - 4\omega\vartheta)\lambda^2 + u(\omega u - \tau\vartheta)\lambda - \tau v^2,$$

was wieder durch v theilbar ist. Denn ausser der schon benutzten Gleichung für $\tau\vartheta - u\omega$ hat man aus I. noch

$$\vartheta\omega = -\tfrac{1}{2}(\tau^2 u + v^2 A_{u\tau} - \tau vp),$$

so dass die fragliche Gleichung nach Weglassung des Factors v sich in

16) . . . . . $0 = (\tau p + 2vA_{u\tau})\lambda^2 - u\rho\lambda - \tau v$

verwandelt.

Wenn man nun aus 15. 16. die Verhältnisse von $\lambda^2, \lambda, 1$ berechnet, so findet man sie abermals durch v theilbar. In der That hat man, wenn ν ein unbestimmter Factor ist:

$$\nu\lambda^2 = v[-4\tau^2 v + 2\tau u v A_{uu} - 2u^2 p\tau + 8\vartheta\rho u]$$
$$\nu\lambda = v[8\vartheta\tau p + 16\vartheta v A_{u\tau} + 4u\rho\tau]$$
$$\nu.1 = v[-4\tau^2 p + 2u\tau p A_{uu} - 8\tau v A_{u\tau} + 4uvA_{uu}A_{u\tau} - 4u^2 p A_{u\tau}] - 2u^2(p^2\tau + 2\rho^2).$$

Nach I. ist nun $p^2\tau + 2\rho^2 = 2vs$, und daher in der That rechts alles durch v theilbar, so dass man diesen Factor in ν eingehen lassen kann. Drückt man noch aus I. $\vartheta\rho$ und aus III. us aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} \nu\lambda^2 &= -4\tau^2 v - 2\tau u v A_{uu} + 2u^2 p\tau + 4u^2 v A_{u\tau} \\ \text{17)}\quad \nu\lambda &= 8\vartheta\tau p + 16\vartheta v A_{u\tau} + 4u\rho\tau \\ \nu.1 &= -4\tau^2 p - 2u\tau p A_{uu} - 8\tau v A_{u\tau} + 4uv(A_{uu}A_{u\tau} - A_{u,pp}) + 4up^3, \end{aligned}$$

und indem man dies in die zweite Gleichung 12. einsetzt, findet man die gesuchte *Gleichung* 9. *Grades*:

$$\text{18)}\quad \begin{aligned} 0 = v[-8\tau^3 + 12\tau^2 u A_{uu} - 8u^2\tau A_{u\tau} - 4u^3(A_{uu}A_{u\tau} - A_{u,pp})] + 2u^3\tau p A_{uu} \\ - 4u^3p^3 + 32\tau v p^2 u - 16(\tau A_{uu} - 4uA_{u\tau})v^2 p - 32 A_{uu}A_{u\tau}v^3. \end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert die Verhältnisse der ξ; sei eine Wurzel der Gleichung $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, und die absoluten Werthe der ζ irgendwie bestimmt, so findet man, indem man diese an Stelle der ξ in 17. einsetzt, den Werth von λ, und sodann die eigentlich gesuchten Werthe der ξ aus den Gleichungen:

$$\xi_1 = \frac{\zeta_1}{\lambda}, \quad \xi_2 = \frac{\zeta_2}{\lambda}.$$

Man kann also auf neun Arten eine lineare Function ξ *so bestimmen, dass der Ausdruck* $2v - 3u\xi + \xi^3$ *ein Cubus ist.*

Ich werde jetzt zeigen, dass die Gleichung 18. eine *Hessesche* Gleichung ist.

§. 5.

Gruppirung der Wurzeln der Gleichung neunten Grades gegen eine derselben.

Nehmen wir an es sei irgend eine Lösung des vorgelegten Problem gegeben, also zwei solche Ausdrücke ξ, η bekannt, dass identisch

$$2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^3.$$

Für eine weitere Lösung ξ', η' muss dann die Identität stattfinden:

$$3\xi u - \xi^3 + \eta^3 = 3\xi' u - \xi'^3 + \eta'^3,$$

oder

19) . . . . $$(\xi' - \xi)[\xi'^2 + \xi'\xi + \xi^2 - 3u] = \eta'^3 - \eta^3.$$

Man sieht daher, dass $\xi' - \xi$ bis auf eine Constante einem der drei Factoren von $\eta'^3 - \eta^3$ gleich sein muss, dass also, wenn ε eine gewisse dritte Wurzel der Einheit, m einen constanten Factor bedeutet:

20) . . . . $$\eta' - \varepsilon\eta = \varepsilon m(\xi' - \xi);$$

oder, mit andern Worten, es giebt immer einen solchen linearen Ausdruck z, dass:

21) . . . . $$\begin{cases} \xi' = \xi + z \\ \eta' = \varepsilon(\eta + mz). \end{cases}$$

Führt man diese Ausdrücke für ξ' und η' in die Gleichung 19. ein, so kann man durch $\xi' - \xi$ dividiren, und es bleibt die Gleichung übrig:

22) . . . $$3u = 3(\xi^2 - m\eta^2) + 3(\xi - m^2\eta)z + (1 - m^3)z^2.$$

Um diese Gleichung zu lösen, führt man eine neue lineare Function ζ ein, indem man setzt:

23) . . . . $$z = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{2\zeta - (\xi - m^2\eta)}{1 - m^3}.$$

Durch diese Substitution verwandelt obige Gleichung sich in die reine Gleichung:

24) . . . . $$\zeta^2 = \frac{1 - m^3}{3}(u - \xi^2 + m\eta^2) + \tfrac{1}{4}(\xi - m^2\eta)^2.$$

Die Zahl m muss also so bestimmt werden, dass der Ausdruck rechts ein vollständiges Quadrat ist, oder es muss die Discriminante des quadratischen Ausdrucks rechts verschwinden. Nach einer oben benutzten Bezeichnung (p. 9) ist diese Discriminante

$$\frac{(1 - m^3)^2}{9}[A_{uu} - 2A_{u,\xi\xi} + 2mA_{u,\eta\eta} - 2mA_{\xi\xi,\eta\eta}]$$
$$+ \frac{1 - m^3}{6}[A_{u,\xi\xi} - 2m^2 A_{u,\xi\eta} + m^4 A_{u,\eta\eta} + m(1 - m^3)A_{\xi\xi,\eta\eta}].$$

Uebergehen wir den Factor 1 m^3 als unwesentlich, setzen wir der Kürze wegen: $A_{u,\xi\xi} = A$, $A_{u,\xi\eta} = B$, $A_{u,\eta\eta} = G$, und bemerken dass

$$A_{\xi\xi,\eta\eta} = \xi^2{}_1\,\eta^2{}_2 - 2\,\xi_1\,\xi_2\,\eta_1\,\eta_2 + \xi_2{}^2\eta_1{}^2 = (\xi\eta)^2,$$

so erhalten wir zur Bestimmung von m die *biquadratische* Gleichung:

$$\text{25)} \quad 0 = \frac{1-m^3}{3}\left[A_{uu} - 2A + 2mC - \tfrac{1}{2}m(\xi\eta)^2\right] + \tfrac{1}{2}\left[A - 2m^2 + m^4 C\right].$$

Man sieht hieraus, dass in Bezug auf jede beliebige Lösung ξ, η *des vorgelegten Problems alle übrigen sich in vier Paare gruppiren, so dass die vier Paare von Lösungen zunächst aus der biquadratischen Gleichung* 25., *sodann aber die Lösungen jedes Paars aus* 21. 23. 24. *erhalten werden.*

Diese Gleichung vierten Grades hat bemerkenswerthe Eigenschaften. Schreibt man sie nach Potenzen von m geordnet:

$$0 = m^4((\xi\eta)^2 - C) + 4m^3(A - \tfrac{1}{2}A_{uu}) - 6m^2B + 4m(C - \tfrac{1}{4}(\xi\eta)^2) + (2A_{uu} - A),$$

so findet man für ihre erste Invariante sogleich den Ausdruck:

$$\begin{aligned} i &= ((\xi\eta)^2 - C)(2A_{uu} - A) - (4C - (\xi\eta)^2)(A - \tfrac{1}{2}A_{uu}) + 3B^2 \\ &= \tfrac{3}{2}(\xi\eta)^2 A_{uu} - 3(AC - B^2). \end{aligned}$$

Aber es ist

$$\begin{aligned} AC - B^2 &= \tfrac{1}{2}\left[(a\xi)^2(b\eta)^2 - 2(a\xi)(b\xi)(a\eta)(b\eta) + (a\eta)^2(b\xi)^2\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(a\xi)(b\eta) - (b\xi)(a\eta)\right]^2 = \tfrac{1}{2}(ab)^2(\xi\eta)^2 = \tfrac{1}{2}A_{uu}(\xi\eta)^2, \end{aligned}$$

daher $i = o$. *Die erste Invariante der biquadratischen Gleichung verschwindet.*

Es ist ferner leicht eine lineare Substitution zu finden, durch welche die biquadratische Gleichung in eine andere übergeht, deren Coefficienten nicht mehr ξ *und* η, *sondern nur noch die simultanen Invarianten von* u *und* v *enthalten.* Führt man in der biquadratischen Gleichung

$$m^4 a + 4m^3 b + 6m^2 c + 4md + e = o$$

die neue Variable σ ein mittelst der Gleichung

$$ma = -\sigma - b,$$

so verwandelt die Gleichung sich in:

$$\sigma^4 + 6\alpha\sigma^2 + 4\beta\sigma + \gamma = 0,$$

wo

$$\alpha = ac - b^2, \quad \beta = 3abc - da^2 - 2b^3,$$

und wenn, wie im vorliegendem Falle, die erste Invariante verschwindet, so hat man noch

$$\gamma = -3\alpha^2,$$

so dass die biquadratische Gleichung die Form annimmt:

$$\sigma^4 + 6\alpha\sigma^2 + 4\beta\sigma - 3\alpha^2 = 0.$$

In dem vorliegenden Falle ist die Substitutionsgleichung:

26) . . . . $$m = \frac{\frac{1}{2}A_{uu} - A - \sigma}{(\xi\eta)^2 - C},$$

und die Coefficienten α, β erhalten die Werthe:

27) $$\begin{cases} \alpha = -B((\xi\eta)^2 - C) - (A - \frac{1}{2}A_{uu})^2 \\ \beta = -3B((\xi\eta)^2 - C)(A - \frac{1}{2}A_{uu}) - (C - \frac{1}{4}(\xi\eta)^2)((\xi\eta)^2 - C)^2 - 2(A - \frac{1}{2}A_{uu})^3. \end{cases}$$

Ich werde zeigen, dass diese Ausdrücke rationale Functionen der simultanen Invarianten von u und v sind. Zu diesem Zwecke bilde ich die simultanen Formen von u und v, indem ich für v den Ausdruck

$$2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^3$$

zu Grunde lege. Man hat identisch

$$u(\xi\eta)^2 = C\xi^2 - 2B\xi\eta + A\eta^2,$$

also auch

$$2v(\xi\eta)^2 = (3C - (\xi\eta)^2)\xi^3 - 6B\xi^2\eta + 3A\xi\eta^2 + (\xi\eta)^2\eta^3;$$

daher, wenn man alle Formen immer für die Variabeln ξ, η bildet, und dann mit passenden Potenzen von $(\xi\,\eta)$ multiplicirt:

$$A_{uu}(\xi\eta)^2 = 2(AC - B^2)$$
$$2p(\xi\eta)^2 = 4\xi(AC - B^2) - A\xi(\xi\eta)^2) + \eta C(\xi\eta)^2$$

oder, wenn man durch $(\xi\eta)^2$ dividirt:

$$2p = \xi[2A_{uu} - A] + \eta C$$

und daher:

$$4A_{u,pp} = A^3 + C^3 - 2ABC + 4A_{uu}(BC - A^2) + 4A^2_{uu}A.$$

Ferner erhält man

$$2\tau(\xi\eta)^2 = \begin{vmatrix} 3C-(\xi\eta)^2 & -2B & \eta^2 \\ -2B & A & -\xi\eta \\ A & (\xi\eta)^2 & \xi^2 \end{vmatrix},$$

und daher

$$2A_{u\tau}(\xi\eta)^2 = \begin{vmatrix} 3C-(\xi\eta)^2 & -2B & C \\ -2B & A & -B \\ A & (\xi\eta)^2 & A \end{vmatrix},$$

oder wenn man die letzte Vertikalreihe von der ersten abzieht, nach der letzten Horizontalreihe ordnet, und durch $(\xi\eta)^2$ dividirt:

$$2A_{u\tau} = -A^2 + BC + A_{uu}A - B(\xi\eta)^2$$

woraus sich unmittelbar

28) . . . . $\alpha = 2A_{u\tau} - \frac{1}{4}A^2_{uu}$

ergiebt. Endlich ist

$$8A_{\tau\tau}(\xi\eta)^2 = \begin{vmatrix} 3C-(\xi\eta)^2 & -2B & 6AC-2A(\xi\eta)^2-8B^2 \\ -2B & A & 2AB+3C(\xi\eta)^2-(\xi\eta)^4 \\ A & (\xi\eta)^2 & -4B(\xi\eta)^2-2A^2 \end{vmatrix}.$$

oder wenn man die erste Vertikalreihe mit $2A$, die zweite mit $2B$ der dritten hinzufügt und sodann durch $(\xi\eta)^2$ dividirt:

$$8A_{\tau\tau} = \begin{vmatrix} 3C-(\xi\eta)^2 & -2B & 6A_{uu}-4A \\ -2B & A & 3C-(\xi\eta)^2 \\ A & (\xi\eta)^2 & -2B \end{vmatrix}$$

$$= 4A^3 + 8B^3 - 12ABC - 6A_{uu}A^2 + (\xi\eta)^2[12AB - 12A_{uu}B - 9C^2] + 6C(\xi\eta)^4 - (\xi\eta)^6$$

und daher

29) . . . . $\beta = 5A_{uu}A_{u\tau} - 2A_{\tau\tau} - 4A_{u,pp} + \frac{1}{4}A^3_{uu}.$

Die Aufsuchung der 8 übrigen Wurzeln, wenn eine gegeben ist, hat man also hiedurch zurückgeführt auf die biquadratische Gleichung

30) . . . . $\sigma^4 + 6(2A_{u\tau} - \frac{1}{4}A^2_{uu})\sigma^2$

$$+ 4(5A_{uu}A_{u\tau} - 2A_{\tau\tau} - 4A_{u,pp} + \frac{1}{4}A^3_{uu})\sigma - 3(2A_{u\tau} - \frac{1}{4}A^2_{uu})^2 = 0.$$

Jeder Wurzel σ dieser Gleichung entsprechen zwei Lösungen, welche durch die Gleichungen gegeben sind:

$$31)\quad \begin{cases} \xi' = \xi + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pm 2\zeta - (\xi - m^2\eta)}{1 - m^3}, \quad \varepsilon^2 \eta' = \eta + \frac{3m}{2} \cdot \frac{\pm 2\zeta - (\xi - m^2\eta)}{1 - m^3}, \\ \zeta^2 = \frac{1 - m^3}{3}(u - \xi^2 - m\eta^2) + \frac{1}{4}(\xi - m^2\eta)^2, \quad m = \frac{\frac{1}{4}A_{uu} - \sigma - A}{(\xi\eta)^2 - C}. \end{cases}$$

Bemerken wir hierzu noch, dass nach §. 4. das Verhältniss der η durch die ξ ausdrückbar ist, dass man also hat

$$\varkappa \eta_1 = \eta^0{}_1, \qquad \varkappa \eta_2 = \eta^0{}_2,$$

wo $\eta^0{}_1$, $\eta^0{}_2$ bekannte Functionen der ξ, und wo $\varkappa^3$ ebenfalls durch die ξ ausgedrückt war. Daher hat man aus der letzten Formel 31.

$$m = \varkappa^2 m^0,$$

wo m^0 eine rationale Function von ξ_1, ξ_2, σ ist; und weiter ist

$$\zeta^2 = \frac{1 - \varkappa^6 m^{0\,3}}{3}(u - \xi^2 - m^0 \eta^{0\,2}) + \frac{1}{4}(\xi - \varkappa^3 m^{0\,2} \eta^0)^2$$

eine rationale Function von ξ_1, ξ_2, σ allein, während die ersten beiden Formeln 31.

$$\xi' = \xi + \frac{3}{2} \frac{\pm 2\zeta - \xi + m^{0\,2} \varkappa^3 \eta^0}{1 - \varkappa^6 m^{0\,3}}$$

$$\varepsilon^2 \eta' \varkappa = \eta^0 + \frac{3\varkappa^3 m^0}{2} \cdot \frac{\pm 2\zeta - \xi + m^{0\,2} \varkappa^3 \eta^0}{1 - \varkappa^6 m^{0\,3}}$$

rechts ebenfalls nur noch solche Functionen enthalten. Diese letzten Formeln nehmen also die schematische Gestalt an:

$$\xi' = M + N\sqrt{\Omega(\xi_1, \xi_2, \sigma)},$$

$$\varepsilon^2 \varkappa \eta' = M' + N'\sqrt{\Omega(\xi_1, \xi_2, \sigma)},$$

wo M, N, M', N' lineare Functionen und Ω eine Constante bedeuten, welche ξ_1, ξ_2, σ sämmtlich nur rational enthalten.

§. 6.

Conjugirte Lösungen.

Drei Lösungen des Problems, deren zwei aus einer derselben mittelst *derselben* Wurzel der biquadratischen Gleichung gefunden werden,

nenne ich *conjugirt.* Ich werde zeigen, *dass dieselben immer conjugirt bleiben, von welcher unter den dreien man auch ausgeht.*

In der That, bezeichnen wir die ursprüngliche Lösung wieder durch ξ, η, die conjugirten aber durch ξ', η' und ξ'', η'', so ist nach 21.

$$32) \quad \ldots \quad \begin{aligned} \xi' &= \xi + z & \eta' &= \varepsilon(\eta + mz) \\ \xi'' &= \xi + z_1 & \eta'' &= \varepsilon_1(\eta + mz_1) \end{aligned}$$

wo ε und ε_1 dritte Wurzeln der Einheit sind. Aber diesen Gleichungen kann man immer auch die Form geben:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' - z & \eta &= \varepsilon^2(\eta' - m\varepsilon z) \\ \xi'' &= \xi' + (z_1 - z) & \eta'' &= \varepsilon^2\varepsilon_1(\eta' + m\varepsilon(z_1 - z)). \end{aligned}$$

Hieraus erhellt sogleich der folgende Satz:

Wenn man, statt von einer Lösung ξ, η auszugehn, von einer ihr mittelst der Wurzel m der biquadratischen Gleichung conjugirten ξ', η' ausgeht, so wird mit dieser wieder conjugirt erstlich ξ, η, und dann die früher mit ξ, η und ξ', η' conjugirte Lösung. Drei einmal conjugirte Lösungen bleiben es also immer, von welcher derselben man auch ausgeht. Und zwar tritt, indem man von ξ', η' statt von ξ, η ausgeht, nur $m\varepsilon$ an die Stelle von m, $-z$ und $z_1 - z$ an die Stelle von z und z_1. Die dritte Potenz der Wurzel m der biquadratischen Gleichung bleibt also ungeändert.

Es ist leicht nachzuweisen, *dass auch die zugehörige Wurzel σ der reducirten biquadratischen Gleichung* 30. *stets ungeändert bleibt, also einem System conjugirter Wurzeln fest angehört.* Bezeichnen wir zu diesem Zweck durch A', B', C', was aus A, B, C wird, wenn man darin die ξ, η durch die ξ', η' ersetzt. Es ist dann nachzuweisen dass (vgl. 26.)

$$m((\xi\eta)^2 - C) + A = \varepsilon m((\xi'\eta')^2 - C') + A'.$$

Um dies nachzuweisen, gehe ich von der Gleichung 22. aus:

$$33) \quad \ldots \quad 3u = 3(\xi^2 - m\eta^2) + 3(\xi - m^2\eta)z + (1 - m^3)z^2,$$

aus welcher, wenn man ξ, η, m, z durch $\xi', \eta', \varepsilon m, -z$ ersetzt, die andere folgt:

$$34) \quad . \quad 3u = 3(\xi'^2 - \varepsilon m\eta'^2) - 3(\xi' - \varepsilon^2 m^2\eta')z + (1 - m^3)z^2.$$

Setzt man nun in der ersten Gleichung $x_1 = \xi_2$, $x_2 = -\xi_1$, oder

$x_1 = \eta_2, x_2 = -\eta_1$ und in der zweiten $x_1 = \xi'_2, x_2 = -\xi'_1$ oder $x_1 = \eta'_2, x_2 = -\eta'_1$, so erhält man die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
3A &= -3m(\xi\eta)^2 - 3m^2(\xi\eta)(\xi z) + (1-m^3)(\xi z)^2 \\
3C &= 3(\xi\eta)^2 + 3(\xi\eta)(z\eta) + (1-m^3)(z\eta)^2 \\
3A' &= -3\varepsilon m(\xi'\eta')^2 + 3\varepsilon^2 m^2(\xi'\eta')(\xi' z) + (1-m^3)(\xi' z)^2 \\
3C' &= 3(\xi'\eta')^2 - 3(\xi'\eta')(z\eta') + (1-m^3)(z\eta')^2.
\end{aligned}$$

Daher folgt:

$$35) \begin{cases} A-A' = -m[(\xi\eta)^2 - \varepsilon(\xi'\eta')^2] - m^2[(\xi\eta)(\xi z) + \varepsilon^2(\xi'\eta')(\xi' z)] + \frac{1-m^3}{3}[(\xi z)^2 - (\xi' z)^2] \\ C-\varepsilon C' = [(\xi\eta)^2 - \varepsilon(\xi'\eta')^2] + [(\xi\eta)(z\eta) + \varepsilon(\xi'\eta')(z\eta')] + \frac{1-m^3}{3}[(\eta z)^2 - \varepsilon(\eta z')^2]. \end{cases}$$

Inzwischen ist

$$\begin{aligned}
(\xi z)^2 - (\xi' z)^2 &= [(\xi z) + (\xi' z)](\xi - \xi', z) = 0 \\
(z\eta)^2 - \varepsilon(z\eta')^2 &= [(z\eta) + \varepsilon^2(z\eta')](z, \eta - \varepsilon^2\eta') = 0,
\end{aligned}$$

und aus **35.** ergiebt sich also weiter:

$$(A - A') - m(C - \varepsilon C')$$
$$= -2m[(\xi\eta)^2 - \varepsilon(\xi'\eta')^2] + m(\xi\eta)(z, m\xi - \eta) + m\varepsilon(\xi'\eta')(z, \varepsilon m\xi' - \eta').$$

Setzt man nun $\xi' - \xi$ an Stelle von z, und bemerkt, dass

$$\varepsilon m\xi' - \eta' = \varepsilon(m\xi - \eta),$$

so kann man dieser Gleichung die Form geben:

$$(A - A') - m(C - \varepsilon C')$$
$$= -2m[(\xi\eta)^2 - \varepsilon(\xi'\eta')^2] - \varepsilon^2 m(\xi\eta)(\xi'\eta') + m(\xi\eta)^2 + \varepsilon^2 m(\xi\eta)(\xi'\eta') - m\varepsilon^2(\xi'\eta')^2$$
$$= -m[(\xi\eta)^2 - \varepsilon(\xi'\eta')^2],$$

was zu beweisen war.

Die biquadratische Gleichung 30. erscheint hienach als die Grundlage für die Lösung der Gleichung neunten Grades. Da jede Wurzel der letzten vier conjugirten Systemen angehört, so muss es $\frac{9 \cdot 4}{3} = 12$ solcher Systeme geben, welche zu drei einer Wurzel der biquadratischen Gleichung entsprechen müssen. Dass sich dies wirklich so verhält, zeigt sich am deutlichsten, wenn man die Gleichung zwölften Grades wirklich aufstellt, von welcher die zwölf conjugirten Systeme abhängen, und zeigt, dass sich dieselbe mit Hülfe der biquadratischen Gleichung 30. in vier cubische Gleichungen auflöst. Dies soll im Folgenden geschehen.

§. 7.

Aufstellung der Gleichung zwölften Grades, von welcher die zwölf conjugirten Systeme von Wurzeln der Gleichung neunten Grades abhängen.

Die zwischen zwei Lösungen ξ, η und ξ', η' eines conjugirten Systems bestehende Gleichung 20.

$$\eta' - \varepsilon\eta = \varepsilon m(\xi' - \xi)$$

kann man auch dadurch identisch befriedigen, dass man eine lineare Function t durch die Gleichung einführt.

36) . . . . . . $\eta = m(\xi + t).$

Die obige Gleichung liefert dann

37) . . . . . . $\eta' = \varepsilon m(\xi' + t),$

und die Gleichungen 32. liefern für die dritte Lösung, welche zu dem System conjugirter gehört

38) . . . . . . $\eta'' = \varepsilon_1 m(\xi'' + t).$

Es bestehen also, indem wir diese Ausdrücke der η einführen, die drei Identitäten:

$$\begin{aligned} 2v &= 3u\xi - \xi^3 + m^3(\xi + t)^3 \\ 2v &= 3u\xi' - \xi'^3 + m^3(\xi' + t)^3 \\ 2v &= 3u\xi'' - \xi''^3 + m^3(\xi'' + t)^3. \end{aligned}$$

Die drei conjugirten Lösungen ξ, ξ', ξ'' sind also, wenn man t und m^3 als gefunden voraussetzt, die Wurzeln der cubischen Gleichung

39) . . . . $2v = 3u\xi - \xi^3 + m^3(\xi + t)^3,$

und die Bestimmung von t und m^3 erfolgt durch die Bedingung, dass diese Gleichung in ξ in der Weise auflösbar sei, dass die dabei eintretenden Irrationalitäten nur in die Coefficienten der x eingehen.

Setzen wir, um die cubische Gleichung zu lösen

40) . . . $$\begin{cases} \xi = \dfrac{m^3 t + \mu + \nu}{1 - m^3} & \eta = m\dfrac{t + \mu + \nu}{1 - m^3} \\ \xi' = \dfrac{m^3 t + \varkappa\mu + \varkappa^2\nu}{1 - m^3} & \eta' = \varepsilon m\dfrac{t + \varkappa\mu + \varkappa^2\nu}{1 - m^3} \\ \xi'' = \dfrac{m^3 t + \varkappa^2\mu + \varkappa\nu}{1 - m^3} & \eta'' = \varepsilon_1 m\dfrac{t + \varkappa^2\mu + \varkappa\nu}{1 - m^3} \end{cases}$$

wo $\varkappa$ eine dritte Wurzel der Einheit ist, so ergeben sich zur Bestimmung der linearen Functionen μ, ν, t und der Constanten m^3 die Gleichungen

$$41) \quad . \; . \begin{cases} \mu\nu \quad\;\; = m^3 t^2 + u(1-m^3) \\ \mu^3 + \nu^3 = m^3(1+m^3)t^3 + 3m^3(1-m^3)tu - 2(1-m^3)^2 v, \end{cases}$$

welche identisch für die x erfüllt werden müssen. In der That giebt die Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten dieser Gleichungen sieben Gleichungen, in welchen die sieben Grössen $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, t_1, t_2, m^3$ die Unbekannten sind. Es ist zu zeigen, dass das Problem ihrer Bestimmung von einer Gleichung zwölften Grades abhängt.

Um zunächst aus den Gleichungen 41. solche Gleichungen abzuleiten, welche die linearen Ausdrücke μ und ν nicht mehr enthalten, bemerke ich folgendes. Die beiden Formen zweiten und dritten Grades

$$\mu\nu = u', \quad \mu^3 + \nu^3 = v'$$

haben erstlich (wie man sofort sieht, indem man μ, ν als die Variabeln betrachtet) die Eigenschaft, dass die aus ihnen gebildete Form p (§. 3.) identisch verschwindet. Sodann ist die aus v' gebildete Form τ gleich $2\mu\nu$ multiplicirt mit dem Quadrate der Determinante von μ und ν, während andererseits auch

$$A_{u'u'} = -\tfrac{1}{2}(\mu\nu)^2.$$

Die beiden Identitäten

$$42) \quad . \; . \; . \; . \quad (p)_{u',v'} = 0, \quad (\tau)_{v'} = -4\mu\nu A_{u'u'}$$

sind jetzt zu bilden, indem man für u' und v' die rechten Seiten der Gleichungen 41. setzt.

Die Form p der beiden Formen

$$u'^2_x = m^3 t^2 + (1-m^3)u$$

$$v'^3_x = m^3(1+m^3)t^3 + 3m^3(1-m^3)tu - 2(1-m^3)^2 v$$

bildet man leicht, wenn man aus v'^3_x zunächst den Ausdruck ableitet

$$43) \quad v'_x v'^2_y = m^3(1+m^3)\, t_x t_y^2 + m^3(1-m^3)(t_x a_y^2 + 2 t_y a_x a_y) - 2(1-m^3)^2 \alpha_x \alpha_y^2.$$

In diesem Ausdrucke hat man nur $y_1^2, -y_1 y_2, y_2^2$ in umgekehrter Folge durch die Coefficienten von u' zu ersetzen; und indem man

dies für die beiden Theile des Ausdrucks von u' einzeln ausführt, ergiebt sich sofort:

$$(p)_{u'v'} = m^6(1-m^3)\,t_x(at)^2 - 2(1-m^3)^2 m^3 a_x(at)^2$$
$$+ m^3(1-m^6)t_x(at)^2 + m^3(1-m^3)^2(t_x A_{uu} + 2(tb)a_x(ab)) - 2(1-m^3)^3 a_x(aa)^2,$$

wo nur noch *ein* umzuformender Term übrig bleibt, nämlich

$$(tb)\,a_x(ab) = \tfrac{1}{2}(ab)\,(a_x(tb) - b_x(ta)) = \tfrac{1}{2}A_{uu}t_x,$$

so dass die Gleichung $(p)_{u'v'} = 0$ mit Uebergehung des überflüssigen Factors $(1-m^3)$ die Gestalt annimmt:

$$0 = m^3(1+2m^3)t_x(at)^2 - 2m^3(1-m^3)a_x(at)^2 + 2m^3(1-m^3)A_{uu}t_x - 2(1-m^3)^2 p_x.$$

Diese Gleichung muss für alle Werthe der x befriedigt sein. Setzen wir erstlich $x_1 = t_2,\ x_2 = -t_1$, so kommt, nach Uebergehung eines Factors $-2(1-m^3)$:

$$44) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad m^3(at)^3 + (1-m^3)(pt) = 0.$$

Setzt man dagegen $x_1 = p_2,\ x_2 = -p_1$, so kommt nach Division mit m^3:

$$0 = (1+2m^3)(tp)(at)^2 - 2(1-m^3)(ap)(at)^2 + 2(1-m^3)A_{uu}(tp).$$

Darin ist

$$(ap)(at)^2 = (a\beta)(at)^2(a\beta)^2 = \tfrac{1}{2}(a\beta)\,((at)(a\beta) + (\beta t)(aa))\,((at)(a\beta) - (\beta t)(aa))$$
$$= (a\beta)^2(at)(at)(a\beta) = (at)(\tau t)(a\tau) = (\rho t)^2 \quad (\S.\ 3.),$$

so dass man der Gleichung auch die Form geben kann:

$$45) \quad (1+2m^3)(pt)(at)^2 + 2(1-m^3)(\rho t)^2 + 2(1-m^3)A_{uu}(pt).$$

Da zur Bestimmung der drei Unbekannten $t_1,\ t_2,\ m$ ausser 44. 45. nur noch *eine* Gleichung nöthig ist, so werde ich die zweite Gleichung 42. nur unter der Voraussetznng $x_1 = t_2,\ x_2 = -t_1$, also $t = 0$, ableiten. Hiedurch verwandelt sich 43. in:

$$(v't)\,v'^2_y = 2m^3(1-m^3)\,t_y a_y(at) - 2(1-m^3)^2(at)\,a_y^2,$$

und man erhält $(\tau)_{v'}$, wenn man in diesem Ausdrucke für $y_1^2,\ -y_1y_2,\ y_2^2$ die Coefficienten des Ausdrucks selbst in umgekehrter Folge setzt, also

$$(\tau)_{v'} = -2m^6(1-m^3)^2(at)^2(bt)^2+8m^3(1-m^3)^3(at)^2(a\alpha)(at)+4(1-m^3)^4(at)(\beta t)(a\beta)^2$$
$$= -2m^6(1-m^3)^2(at)^2(bt)^2 + 8m^3(1-m^3)^3(\vartheta t)^3 + 4(1-m^3)^4(\tau t)^2.$$

Zugleich ist

$$A_{u'u'} = (1-m^3)^2 A_{uu} + 2m^3(1-m^3)(at)^2.$$

Daher verwandelt sich die zweite Gleichung 42., nach Division mit $2(1-m^3)^2$ in:

$$46)\quad 0 = - m^6(at)^2(bt)^2 + 4m^3(1-m^3)(\vartheta t)^3 + 2(1-m^3)^2(\tau t)^2 + 2(at)^2[(1-m^3)A_{uu} + 2m^3(at)^2].$$

Im Folgenden werde ich der Bequemlichkeit wegen für alle vorkommenden Formen voraussetzen, dass darin $x_1 = t_2$, $x_2 = -t_1$ gesetzt sei. Unter dieser Voraussetzung nehmen die Gleichungen 44. 45. 46. nunmehr folgende Gestalt an:

$$47)\quad \begin{cases} 0 = m^3 v + (1-m^3)p \\ 0 = (1+2m^3)pu + 2(1-m^3)\rho + 2(1-m^3)A_{uu}p \\ 0 = m^3(4-m^3)u^2 + 4m^3(1-m^3)\vartheta + 2(1-m^3)^2\tau + 2(1-m^3)A_{uu}u \end{cases}$$

Diese Gleichungen enthalten die Unbekannten t_1, t_2, m. Ich werde statt t_1 und t_2 setzen $\frac{t_1}{\lambda}$, $\frac{t_2}{\lambda}$, wodurch die Gleichungen in

$$48)\quad \begin{cases} 0 = m^3 v + (1-m^3)p\lambda^2 \\ 0 = (1+2m^3)pu + 2(1-m^3)\rho\lambda + 2(1-m^3)A_{uu}p\lambda^2 \\ 0 = m^3(4-m^3)u^2 + 4m^3(1-m^3)\vartheta\lambda + (2(1-m^3)^2\tau + 2(1-m^3)A_{uu}u)\lambda^2 \end{cases}$$

übergehen, und werde, indem ich λ und m eliminire, eine einzige homogene Gleichung für t_1, t_2 herstellen, welche dann die gesuchte Gleichung zwölften Grades ist. Entnimmt man aus der ersten Gleichung den Werth

$$49)\quad \ldots\ldots\quad m^3 = \frac{p\lambda^2}{p\lambda^2 - v},$$

und setzt dies in die andern beiden Gleichungen ein, so erhält man:

$$50)\quad \begin{cases} 0 = (v-3p\lambda^2)pu + 2v\rho\lambda + 2vA_{uu}p\lambda^2 \\ 0 = -(4v-3p\lambda^2)pu^2 - 4pv\vartheta\lambda + 2v(v\tau + (v-p\lambda^2)A_{uu}u), \end{cases}$$

die letztere nach Division mit λ^2. Addirt man die erste Gleichung, mit u multiplicirt, zur zweiten, so wird diese durch v theilbar, und es bleibt:

$$0 = -3pu^2 - (4p\vartheta - 2u\rho)\lambda + 2v(\tau + A_{uu}u),$$

woraus

$$51) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \lambda = \frac{-3pu^2 + 2v(\tau + A_{uu}u)}{4p\vartheta - 2u\rho}.$$

Und wenn man dies in die erste Gleichung 50. einsetzt, erhält man:

$$p(3up - 2A_{uu}v)((3pu - 2A_{uu}v)u - 2\tau v)^2$$
$$+ 2\rho v(4p\vartheta - 2\rho u)((3pu - 2A_{uu}v)u - 2\tau v) - upv(4\vartheta p - 2\rho u)^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist vom vierzehnten Grade; sie reducirt sich aber auf den zwölften, indem sie, wie leicht ersichtlich, durch u theilbar wird. Denn die nicht mit u behafteten Glieder sind

$$16pv^2\tau(\vartheta\rho + \tfrac{1}{2}\tau v A_{uu}),$$

was nach der Formel für $\vartheta\rho$ aus Tafel I. gleich

$$8pv^2\tau u(A_{u\tau}v + p\tau)$$

ist. Entnimmt man überhaupt die Werthe von ρ^2, $\vartheta\rho$, ϑ^2 den Formeln (Tafel I.)

$$\begin{aligned}
\vartheta^2 &= -\tfrac{1}{2}(A_{uu}v^2 - 2vup + \tau u^2) \\
\vartheta\rho &= \tfrac{1}{2}(A_{u\tau}uv - A_{uu}v\tau + p\tau u) \\
\rho^2 &= vs - \tfrac{1}{2}\tau p^2,
\end{aligned}$$

und ersetzt im Resultate us und τs durch die Ausdrücke (Tafel III.)

$$\begin{aligned}
us &= vA_{u,pp} + p(A_{uu}\tau - A_{u\tau}u) - p^3 \\
\tau s &= vA_{\tau,pp} + p(A_{u\tau}\tau - A_{\tau\tau}u),
\end{aligned}$$

so erhält man mit Uebergehung des Factors u die Gleichung:

$$0 = 27p^4u^4 - 54A_{uu}vp^3u^3 + 36(A^2_{uu} + A_{u\tau})v^2p^2u^2$$
$$- 8(A^3_{uu} + 2A_{uu}A_{u\tau} + 2A_{u,pp} + A_{\tau\tau})v^3pu + 8(A_{uu}A_{u,pp} + A_{\tau,pp})v^4.$$

Diese Gleichung zwölften Grades enthält τ gar nicht mehr; sie ist in der That eine biquadratische Gleichung für $\frac{pu}{v}$, und ihre Auflösung kommt also auf die Lösung einer biquadratischen Gleichung und mehrerer cubischer zurück. Aber die biquadratische Gleichung ist in der That keine andre, als unsere Gleichung 30.; dem setzt man

$$52) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3pu = (\sigma + \tfrac{3}{2}A_{uu})v$$

so geht die Gleichung zwölften Grades in die biquadratische (30.)

$$53) \quad \ldots \quad 0 = \sigma^4 + 6(2A_{u\tau} - \tfrac{1}{4}A^2_{uu})\sigma^2$$
$$+ 4(5A_{uu}A_{u\tau} - 2A_{\tau\tau} - 4A_{u,pp} + \tfrac{1}{4}A^3_{uu})\sigma - 3(2A_{u\tau} - \tfrac{1}{4}A^2_{uu})^2$$

über, und die Aufgabe ist also auf diese und die cubischen Gleichungen 52. zurückgeführt. Die letztern liefern die drei conjugirten Systeme, welche einer Wurzel der Gleichung 53. entsprechen, und welche alle Wurzeln der Gleichung neunten Grades, jede nur einmal, enthalten müssen.

§. 8.

Andere Ableitung der cubischen Hülfsgleichungen. Die Auflösung der Gleichung neunten Grades.

Die am Ende der vorhin gegebenen Betrachtung nothwendigen Rechnungen kann man vermeiden, indem man folgendermassen die cubische Gleichung 52. direct aufsucht. Wir fanden oben (26.)

$$m = \frac{\frac{1}{2}A_{uu} - A - \sigma}{(\xi\eta)^2 - C}.$$

Es wurde ferner in §. 6. gezeigt, dass wenn man ξ, η durch ξ' und η' oder durch ξ'' und η'' ersetzt, m in $m\varepsilon$ und $m\varepsilon_1$ übergeht. Man hat also auch

$$m\varepsilon = \frac{\frac{1}{2}A_{uu} - A' - \sigma}{(\xi'\eta')^2 - C'}$$
$$m\varepsilon_1 = \frac{\frac{1}{2}A_{uu} - A'' - \sigma}{(\xi''\eta'')^2 - C''},$$

wo A', C' und A'', C'' die Werthe bedeuten, in welche A, C übergehen, wenn man ξ, η in ξ', η' und in ξ'', η'' verwandelt.

Setzt man nun in diese drei Gleichungen, nachdem man mit den Nennern heraufmultiplicirt hat, die Ausdrücke 40. conjugirter Lösungen ein, so erhält man:

$$m^3[(t\mu) + (t\nu)]^2 - m^3((at) + (a\mu) + (a\nu))^2$$
$$= (1 - m^3)^2(\tfrac{1}{2}A_{uu} - \sigma) - [m^3(at) + (a\mu) + (a\nu)]^2,$$

nebst zwei andern Gleichungen, welche aus dieser hervorgehen, wenn man μ, ν durch $\varkappa\mu$, $\varkappa^2\nu$ oder durch $\varkappa^2\mu$, $\varkappa\nu$ ersetzt, wo $\varkappa$ eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit ist. Daher zerfällt die obige Gleichung sofort in die drei folgenden:

$$m^3(t\mu)^2 \quad - \quad m^3((a\mu)^2+2(at)\,(a\nu)) = -(a\mu)^2 - 2m^3(at)(a\nu)$$
$$m^3(t\nu)^2 \quad - \quad m^3((a\nu)^2+2(at)\,(a\mu)) = -(a\nu)^2 - 2m^3(at)(a\mu)$$
$$2m^3(t\mu)(t\nu) - m^3((at)^2+2(a\mu)(a\nu)) = (1-m^3)^2(\tfrac{1}{2}A_{uu}-\sigma) - m^6(at)^2 - 2(a\mu)(a\nu).$$

Nun ist aber in Folge der Gleichungen 41.

$$(t\mu)(t\nu) = (1-m^3)(at)^2, \quad (a\mu)(a\nu) = m^3(at)^2 + (1-m^3)A_{uu}.$$

Führt man dies in die letzte der obigen Gleichungen ein, und bezeichnet wieder $(at)^2$ durch u, indem man wie im Vorigen $x_1 = t_2$, $x_2 = -t_1$ gesetzt denkt, so erhält man, mit Auslassung eines Factors $(1-m^3)$:

$$0 = (1-m^3)(\tfrac{3}{2}A_{uu}+\sigma) + 3um^3.$$

Diese Gleichung aber zusammen mit der ersten Gleichung 47.:

$$0 = (1-m^3)p + m^3 v$$

giebt ohne Weiteres durch Elimination von m

$$3up = v(\sigma + \tfrac{3}{2}A_{uu}),$$

was die cubische Gleichung 52. ist. —

Die Auflösung der Gleichung neunten Grades gestaltet sich nach dem Vorhergehenden folgendermassen. Man sucht zwei Wurzeln σ, σ' der biquadratischen Gleichung 53., und löst die beiden zugehörigen cubischen Gleichungen 52., welche zunächst die *Verhältnisse* der zugehörigen t, sodann aber mit Hülfe von 51. 49. auch die absoluten Werthe, so wie die Werthe von m^3, liefern. Sind nun t, t' zwei lineare Functionen, welche nicht derselben von diesen beiden cubischen Gleichungen zugehören. Man hat dann aus 39. für eine gewisse Lösung ξ des vorgelegten Problems zugleich die beiden Gleichungen:

$$54) \quad \ldots \quad \begin{aligned} 2v &= 3u\xi - \xi^3 + m^3(\xi+t)^3 \\ 2v &= 3u\xi - \xi^3 + m'^3(\xi+t')^3. \end{aligned}$$

Daher folgt, wenn man die Werthe der m, m' aus den gegebenen Werthen von m^3, m'^3 irgendwie bestimmt denkt:

$$m(\xi+t) = \varepsilon m'(\xi+t'),$$

also

$$\xi = -\frac{mt-\varepsilon m't'}{m-\varepsilon m'}.$$

Es bleibt nur noch die Bestimmung von ε übrig. Diese erfolgt, indem der Werth von ξ in eine der Gleichungen 54. einsetzt, wodurch man erhält:

$$2v = -3u\frac{mt-\varepsilon m't'}{m-\varepsilon m'} + \frac{m^3 m'^3}{(m-\varepsilon m')^3}(t'-t)^3 + \left(\frac{mt-\varepsilon m't'}{m-\varepsilon m'}\right)^3.$$

Diese Gleichung kann nur für *einen* Werth von ε bestehn, und genügt daher zu seiner Bestimmung.

§. 9.

Gruppirung der Lösungen verschiedener Tripel gegen die Lösungen eines Tripels.

Fassen wir jetzt alles auf die Lösungen erster Classe bezügliche zusammen, so sehen wir, dass dieselben in der That neun Tripel bilden, welche von einer Hesseschen Gleichung neunten Grades abhängen.

Aber zwischen den Lösungen der verschiedenen Tripel finden noch Beziehungen Statt, welche durch die Gleichung 36. ausgedrückt werden. Sind ξ und

$$1) \quad \ldots\ldots \quad \eta = m(\xi + t)$$

Functionen, welche zusammen eine Lösung der Gleichung

$$2) \quad \ldots\ldots \quad 2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^3$$

bilden, also eine Lösung erster Classe bestimmen, so gehören zu demselben Tripel die Lösungen, welche durch ξ und beziehungsweise die Ausdrücke

$$3) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \eta' = \varepsilon m(\xi + t) \\ \eta'' = \varepsilon^2 m(\xi + t) \end{cases}$$

gegeben sind. In einem andern Tripel, welches durch die lineare Function ξ_1 characterisirt ist, hat man dann entsprechend

$$4) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \eta_1 = m(\xi_1 + t) \\ \eta'_1 = \varepsilon m(\xi_1 + t) \\ \eta''_1 = \varepsilon^2 m(\xi_1 + t) \end{cases}$$

und mit beiden Tripeln ist ein drittes conjugirt, welches durch ξ_2 und die Ausdrücke

$$5) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \eta_2 = m(\xi_2+t) \\ \eta'_2 = \varepsilon\, m(\xi_2+t) \\ \eta''_2 = \varepsilon^2 m(\xi_2+t) \end{cases}$$

bestimmt ist. Man erhält ebenso die drei übrigen Systeme conjugirter Tripel, welchen das erste angehört, wenn man in diesen Formeln m, t durch m', t'; m'', t''; m''', t''' ersetzt, wo m, m', m'', m''' die vier Wurzeln der Gleichung 25. (p. 33.) sind.

Durch diese Formeln sind den Lösungen *eines* Tripels die jedes der acht andern einzeln zugeordnet, indem die vortretende Potenz von ε bei entsprechenden Lösungen dieselbe ist. Es entsteht nun die Frage, ob diese Art der Zuordnung unverändert bleibt, wenn an Stelle der Lösung ξ, η eine Lösung eines andern Tripels, etwa ξ_1, η_1, den Ausgang bildet.

Zunächst sieht man sofort, *dass für die conjugirten Tripel, in denen* ξ, η; ξ_1, η_1; ξ_2, η_2 *vorkommen, die Zuordnung sich nicht ändern kann, so dass also drei conjugirte Tripel stets eine feste Zuordnung der in ihnen enthaltenen Lösungen besitzen.* Denn die obigen Gleichungen fahren fort zu bestehen, von welcher der drei Lösungen man auch ausgeht. Aber es ist leicht zu zeigen, dass für eines der sechs übrigen Tripel die Zuordnung nicht bestehen bleiben kann. Seien ξ, η, von welchen wir früher ausgingen, ξ_1, η_1, von welchem jetzt ausgegangen werden soll, und ξ_0, η_0 drei nicht conjugirten Tripeln angehörig; also

$$\eta_0 = m'(\xi_0+t'), \quad \eta_1 = m'(\xi_1+t').$$

Sollte nun die Art der Zuordnung erhalten bleiben, auch wenn man von η_1, ξ_1 ausgeht, so müsste auch sein:

$$\eta_0 = m''(\xi_0+t''), \quad \eta_1 = m''(\xi_1+t'').$$

Man hätte also, nach Elimination der t, die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \eta_1 - \eta &= m\,(\xi_1 - \xi) \\ \eta - \eta_0 &= m'\,(\xi - \xi_0) \\ \eta_0 - \eta_1 &= m''\,(\xi_0 - \xi_1), \end{aligned}$$

also

$$0 = m(\xi_1 - \xi) + m'(\xi - \xi_0) + m''(\xi_0 - \xi_1),$$

und da zugleich die m im Allgemeinen sämmtlich verschieden sind, so folgt daraus, dass die ξ die Form haben:

$$\begin{aligned} \xi &= A + m'' B \\ \xi' &= A + m' B \\ \xi_0 &= A + m\, B, \end{aligned}$$

wo A, B irgend welche lineare Functionen sind. Und es ergiebt sich weiter:

$$\begin{aligned} \eta_1 - \eta &= m\,(m' - m'')B \\ \eta - \eta_0 &= m'\,(m'' - m\,)B \\ \eta_0 - \eta_1 &= m''(m - m')B, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \eta &= C + m' m\, B \\ \eta_1 &= C + m\, m'' B \\ \eta_2 &= C + m'' m' B, \end{aligned}$$

wo C abermals eine beliebige lineare Function ist.

Andrerseits, da die $\xi, \eta;\ \xi_1, \eta_1;\ \xi_0, \eta_0$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2v &= 3u\xi - \xi^3 + \eta^3 \\ 2v &= 3u\xi_1 - \xi_1^3 + \eta_1^3 \\ 2v &= 3u\xi_0 - \xi_0^3 + \eta_0^3 \end{aligned}$$

befriedigen, folgt, dass identisch:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \xi & \eta^3 - \xi^3 \\ 1 & \xi_1 & \eta_1^3 - \xi_1^3 \\ 1 & \xi_0 & \eta_0^3 - \xi_0^3 \end{vmatrix}.$$

Setzt man hier die obigen Werthe der ξ, η ein, so kann man zunächst B als Factor herausziehen, und es bleibt

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & m'' & \eta^3 - \xi^3 \\ 1 & m' & \eta_1^3 - \xi_1^3 \\ 1 & m & \eta_0^3 - \xi_0^3 \end{vmatrix}.$$

Zerstört man nun noch mit Hülfe der ersten Vertikalreihen die betreffenden Glieder der letzten, so ist die Gleichung abermals durch B

theilbar, und es bleiben alsdann durch B zum drittenmal nicht unmittelbar theilbar die Glieder

$$\begin{vmatrix} & m'' & 3m\, m' C^2 \\ 1 & m' & -3m'' m\, C^2 \\ 1 & m & 3m' m\, C^2 \end{vmatrix}.$$

Da nun das Differenzenproduct der m nicht verschwindet, so müsste C durch B theilbar sein, also die η nur durch constante Factoren verschieden, was im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Sind also ξ_1, η_1 und ξ_0, η_0 der Lösung ξ, η zugeordnet, aber Tripeln angehörig, welche dem ξ, η enthaltenden Tripel nicht conjugirt sind, so hat man zwar

$$\eta = m(\xi + t), \quad \eta_1 = m(\xi_1 + t),$$
$$\eta = m'(\xi + t'), \quad \eta_0 = m'(\xi_0 + t'),$$

aber zugleich

$$\eta_1 = m''(\xi_1 + t''),$$
$$\eta_0 = em''(\xi_0 + t''),$$

wo e eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit ist. Die Lösungen des Tripels ξ_0, η_0 sind also denen des Tripels ξ_1, η_1 nicht so zugeordnet, wie sie einander wegen ihrer gleichzeitigen Zuordnung zu dem Tripel ξ, η entsprechen, sondern bei den Lösungen eines der Tripel muss man eine cyclische Vertauschung vornehmen, um die neue Zugehörigkeit zu erhalten.

Betrachten wir nun das zu ξ_1, η_1; ξ_0, η_0 conjugirte Tripel. Dieses muss zu ξ, η eine Art der Zuordnung haben, welche weder mit der des Tripels ξ_1, η_1, noch mit der des Tripels ξ_0, η_0 übereinstimmt. Bezeichnet man also durch ξ_3, η_3 die Lösung dieses Tripels, für welche die Gleichungen stattfinden:

$$\eta = m'''(\xi + t'''), \quad \eta_3 = m'''(\xi_3 + t'''),$$

so muss sich in Bezug auf ξ_1, η_1 die Art der Zuordnung ausdrücken durch die Gleichungen:

$$\eta_1 = m''(\xi_1 + t''), \quad \eta_3 = e^2 m''(\xi_3 + t'').$$

Wenn man also an Stelle des Tripels ξ, η von einem andern Tripel ξ_1, η_1 ausgeht, und zwei mit diesem conjugirte Tripel betrachtet, unter denen ξ, η sich nicht befindet, so erhält man die Art ihrer Zuordnung zum Tripel ξ_1, η_1, wenn man auf ihre Zuordnungen gegen das Tripel ξ, η die beiden verschiedenen cyclischen Vertauschungen anwendet.

Dieses muss natürlich auch umgekehrt stattfinden, wenn man von ξ_1, η_1 als Ausgangstripel zu ξ, η wieder zurückkehrt. *Bei der neuen Zuordnungsart müssen also zwei mit ξ, η conjugirte Tripel sich so verhalten, dass man auf die Art ihrer Zuordnung zu ξ_1, η_1, zwei verschiedene cyclische Vertauschungen anwenden muss, um zu der alten Zuordnung zurückzukehren.*

Hiedurch ist nun leicht alles bestimmt. Bezeichnen wir die neun Tripel durch die Zahlen 1 bis 9, die Zuordnung in Bezug auf das Tripel 1 durch Indices a, b, c, so dass das Tripel i die Lösungen i_a, i_b, i_c, enthält, welche den Lösungen 1_a, 1_b, 1_c zugeordnet sind. Die 27 Lösungen erster Classe, in Bezug auf das Tripel 1 geordnet, welches unterstrichen ist, kann man dann folgendermassen anschreiben:

$\underline{1_a}$	$\underline{1_b}$	$\underline{1_c}$	4_a	4_b	4_c	7_a	7_b	7_c
2_a	2_b	2_c	5_a	5_b	5_c	8_a	8_b	8_c
3_a	3_b	3_c	6_a	6_b	6_c	9_a	9_b	9_c.

Ferner seien die zwölf Systeme conjugirter Tripel, den Wurzeln der biquadratischen Gleichung entsprechend in vier Gruppen von je dreien getheilt, folgende:

1 2 3	1 4 7	1 5 9	1 6 8
4 5 6	2 5 8	2 6 7	2 4 9
7 8 9	3 6 9	3 4 8	3 5 7.

Sucht man jetzt die Zuordnung der neun Tripel in Bezug auf irgend eines der andern Tripel, etwa 2, so nimmt man zunächst zwei mit 2 conjugirte Tripel, etwa 5, 8; bei einem, es sei 5, geht a, b, c in b, c, a, bei dem andern, 8, in c, a, b über. Die neuen Anordnungen der andern Tripel findet man, indem man die 5 oder 8 und 1 enthaltenden conjugirten Systeme sucht, was auf 9 und 6 führt, und dann wieder die 2 und 9 oder 6 enthaltenden, was schliesslich auf 4 und 7

führt. Indem man immer die beiden obigen Sätze anwendet, erhält man die folgende neue Anordnung der Tripel, bei welcher das Tripel 2 zum Ausgange dient:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1_a & 1_b & 1_c & & 4_b & 4_c & 4_a & & 7_c & 7_a & 7_b \\
\underline{2_a} & \underline{2_b} & \underline{2_c} & & 5_b & 5_c & 5_a & & 8_c & 8_a & 8_b \\
3_a & 3_b & 3_c & & 6_b & 6_c & 6_a & & 9_c & 9_a & 9_b.
\end{array}$$

Will man dagegen die neue Anordnung der Tripel finden, bei welcher 3 zu Grunde gelegt ist, so hat man a, b, c wieder an den betreffenden Stellen cyclisch zu permutiren, doch so, dass, während die drei ersten Tripel ungeändert bleiben, die Anordnung der andern weder mit der auf 1 bezüglichen Anordnung, noch mit der auf 2 bezüglichen übereinstimmt. Man erhält also die folgende Anordnung der Tripel:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1_a & 1_b & 1_c & & 4_c & 4_a & 4_b & & 7_b & 7_c & 7_a \\
2_a & 2_b & 2_c & & 5_c & 5_a & 5_b & & 8_b & 8_c & 8_a \\
\underline{3_a} & \underline{3_b} & \underline{3_c} & & 6_c & 6_a & 6_b & & 9_b & 9_c & 9_a.
\end{array}$$

Die Anordnung in Bezug auf jeden der sechs andern Tripel ist hienach leicht zu finden, indem man nur immer die obigen Sätze anwendet und die vorigen drei Schemata benutzt; und zwar erhält man ohne Weiteres folgende neue Schemata:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1_a & 1_b & 1_c & & \underline{4_a} & \underline{4_b} & \underline{4_c} & & 7_a & 7_b & 7_c \\
2_c & 2_a & 2_b & & 5_c & 5_a & 5_b & & 8_c & 8_a & 8_b \\
3_b & 3_c & 3_a & & 6_b & 6_c & 6_a & & 9_b & 9_c & 9_a
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1_a & 1_b & 1_c & & 4_b & 4_c & 4_a & & 7_c & 7_a & 7_b \\
2_c & 2_a & 2_b & & \underline{5_a} & \underline{5_b} & \underline{5_c} & & 8_b & 8_c & 8_a \\
3_b & 3_c & 3_a & & 6_c & 6_a & 6_b & & 9_a & 9_b & 9_c
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1_a & 1_b & 1_c & & 4_c & 4_a & 4_b & & 7_b & 7_c & 7_a \\
2_c & 2_a & 2_b & & 5_b & 5_c & 5_a & & 8_a & 8_b & 8_c \\
3_b & 3_c & 3_a & & \underline{6_a} & \underline{6_b} & \underline{6_c} & & 9_c & 9_a & 9_b
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1_a & 1_b & 1_c & & 4_a & 4_b & 4_c & & \underline{7_a} & \underline{7_b} & \underline{7_c} \\
2_b & 2_c & 2_a & & 5_b & 5_c & 5_a & & 8_b & 8_c & 8_a \\
3_c & 3_a & 3_b & & 6_c & 6_a & 6_b & & 9_c & 9_a & 9_b
\end{array}$$

1_a	1_b	1_c	4_b	4_c	4_a	7_c	7_a	7_b
2_b	2_c	2_a	5_c	5_a	5_b	8_a	8_b	8_c
3_c	3_a	3_b	6_a	6_b	6_c	9_b	9_c	9_a
1_a	1_b	1_c	4_c	4_a	4_b	7_b	7_c	7_a
2_b	2_c	2_a	5_a	5_b	5_c	8_c	8_a	8_b
3_c	3_a	3_b	6_b	6_c	6_a	9_a	9_b	9_c

§. 10.

Lösungen zweiter Classe. Ihre Zurückführung auf das Hülfsproblem.

Was die Hessesche Gleichung anbetrifft, so kann man ihre Lösungen leicht mit den bekannten Vorstellungen in Beziehung setzen, welche das Problem der Wendepuncte einer Curve dritter Ordnung ergiebt. Es entsprechen dann die conjugirten Lösungen Wendepuncten, die auf einer Geraden liegen. Die cubische Gleichung 52. (p. 27) entspricht einem Wendepunctsdreiecke, die biquadratische Gleichung endlich den vier Wendepunctsdreiecken. Es wird sich zeigen, dass dieselben Vorstellungen auch dazu dienen, die Gruppirung der Lösungen zweiter Classe übersichtlich zu machen, zu deren Betrachtung ich mich jetzt wende.

Die Lösungen zweiter Classe sind dadurch gegeben, dass jeder der Factoren (§. 2)

$$v + v', \quad v - v'$$

einen linearen Factor mit jedem der Factoren

$$u - u', \quad u - \varepsilon u', \quad u - \varepsilon^2 u'$$

gemein hat. Man kann also setzen:

$$\begin{aligned} u - u' &= ab \\ u - \varepsilon u' &= a'b' \\ u - \varepsilon^2 u' &= a''b'' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v + v' &= a a' a'' \\ v - v' &= b b' b'', \end{aligned}$$

wo die a und b lineare Functionen bedeuten. Man kann diese Gleichungen ähnlich behandeln wie oben diejenigen, welche auf Lösungen erster Classe führten; indem man statt der drei ersten Gleichungen die

Summe derselben mit 1, 1, 1, oder 1, ε, ε^2 oder 1, ε^2, ε multiplicirt, statt der beiden letzten aber ihre Summe und Differenz setzt, erhält man:

$$1)\quad \begin{cases} 3u. = ab + a'b' + a''b'' \\ 0 \quad = ab + \varepsilon a'b' + \varepsilon^2 a''b'' \\ 2v \quad = aa'a'' + bb'b'' \end{cases} \qquad \begin{array}{l} -3u' = ab + \varepsilon^2 a'b' + \varepsilon a''b'' \\ 2v' = aa'a'' - bb'b''. \end{array}$$

Die letzten dieser Gleichungen liefern die neue Lösung u', v', wenn man die linearen Functionen a und b als bekannt voraussetzt; die ersten geben die Mittel zu ihrer Bestimmung.

Aber diese linearen Functionen sind aus den Gleichungen 1. nicht vollständig bestimmt. Diese Gleichungen ändern sich nicht, wenn man die Functionen

$$a,\quad b,\quad a',\quad b',\quad a'',\quad b''$$

beziehungsweise durch

$$\varkappa a,\quad \frac{b}{\varkappa},\quad \varkappa' a',\quad \frac{b'}{\varkappa'},\quad \varkappa'' a'',\quad \frac{b''}{\varkappa''}$$

ersetzt, sobald nur

$$\varkappa\varkappa'\varkappa'' = 1$$

ist. Führt man also an Stelle der sechs Functionen a, b die folgenden ein:

$$2)\quad .\ .\quad \begin{cases} 3\alpha \ = a + a' + a'' & 3\beta \ = b + b' + b'' \\ 3\alpha' = a + \varepsilon a' + \varepsilon^2 a'' & 3\beta' = b + \varepsilon b' + \varepsilon^2 b'' \\ 3\alpha'' = a + \varepsilon^2 a' + \varepsilon a'' & 3\beta'' = b + \varepsilon^2 b' + \varepsilon b'', \end{cases}$$

so kann man die a sich immer mit Hülfe von Factoren $\varkappa$ so modificirt denken, dass α identisch verschwindet; eine Bedingung, welche in der That hinreicht, die Verhältnisse der $\varkappa$ völlig zu bestimmen. Setzen wir aber $\alpha = 0$, so finden wir aus 2. durch Auflösung:

$$3)\quad .\ .\ .\ .\quad \begin{cases} a \ = \alpha' + \alpha'' & b \ = \beta + \beta' + \beta'' \\ a' = \varepsilon^2\alpha' + \varepsilon\alpha'' & b' = \beta + \varepsilon^2\beta' + \varepsilon\beta'' \\ a'' = \varepsilon\alpha' + \varepsilon^2\alpha'' & b'' = \beta + \varepsilon\beta' + \varepsilon^2\beta'', \end{cases}$$

und indem wir diese Ausdrücke in 1. einführen, gehen diese Gleichungen in folgende über:

$$4)\quad .\ .\quad \begin{cases} u = \alpha'\beta'' + \beta'\alpha'' \\ 0 = \alpha'\beta + \alpha''\beta'' \\ 2v = \alpha'^3 + \alpha''^3 + \beta^3 + \beta'^3 + \beta''^3 - 3\beta\beta'\beta'' \end{cases}$$

$$5)\quad \left\{\begin{array}{l} -u' = \alpha'\beta' + \alpha''\beta \\ 2v' = \alpha'^3 + \alpha''^3 - \beta^3 - \beta'^3 - \beta''^3 + 3\beta\beta'\beta''. \end{array}\right.$$

Die zweite der Gleichungen 4. lässt sich identisch befriedigen. Wenn man versucht α' und α'' nur durch eine Constante verschieden anzunehmen, so findet man leicht, dass die daraus entstehenden Gleichungen im Allgemeinen nicht befriedigt werden können. Man erhält nämlich dann alle a nur um constante Factoren verschieden, und indem man diese in die b eingehen lässt, verwandeln die Gleichungen 1. sich in folgende:

$$\begin{array}{ll} 3u = a(b + b' + b'') & \\ 0 = a(b + \varepsilon b' + \varepsilon^2 b'') & -3u' = a(b + \varepsilon^2 b' + \varepsilon b'') \\ 2v = a^3 + bb'b'' & 2v' = a^3 - bb'b''. \end{array}$$

Da nun a nicht verschwinden kann, so muss der Ausdruck $b + \varepsilon b' + \varepsilon^2 b''$ verschwinden; lässt man die b mit neuen Grössen β wieder verbunden sein wie in 2., so ist also $\beta' = 0$, und man hat ausserdem:

$$3u = a\beta, \quad 2v = a^3 + \beta^3 + \beta''^3.$$

Es ist klar, dass u und v im Allgemeinen nicht in diese Form gebracht werden können, welche nur sechs Constante enthält.

Man muss die zweite Gleichung 4. also dadurch erfüllen, dass man

$$\alpha' = \varkappa\beta, \quad \alpha'' = -\varkappa\beta$$

setzt, wo $\varkappa$ eine noch unbestimmte Constante ist. Die übrigen Gleichungen 4. 5. verwandeln sich hierdurch in folgende:

$$6)\quad \left\{\begin{array}{l} u = \varkappa(\beta''^2 - \beta\beta') \\ 2v = (1-\varkappa^3)\beta^3 + \beta'^3 + (1+\varkappa^3)\beta''^3 - 3\beta\beta'\beta'' \\ u' = -\varkappa(\beta^2 + \beta'\beta'') \\ 2v' = -(1+\varkappa^3)\beta^3 - \beta'^3 - (1-\varkappa^3)\beta''^3 + 3\beta\beta'\beta''. \end{array}\right.$$

Die ersten dieser Gleichungen sind nun nicht verschieden von den Gleichungen 41., welche oben auf die Gleichung zwölften Grades führten, welche durch eine biquadratische aufgelöst wurde. In der That braucht man denselben nur, indem man nach $\beta\beta'$ und nach $(1-\varkappa^3)\beta^3 + \beta'^3$ auflöst, die Form zu geben:

$$\beta\beta' = \beta''^2 - \frac{u}{x}$$

$$(1-x^3)\beta^3 + \beta'^3 = 2v + (2-x^3)\beta''^3 - \frac{3u\beta''}{x},$$

und dann zu setzen:

$$\beta'' = \frac{x m^2 t}{1-m^3}, \quad x^3 = -\frac{1-m^3}{m^3}, \quad \beta = -\frac{\mu m}{\sqrt[3]{1-m^3}}, \quad \beta' = -\frac{\nu}{\sqrt[3]{1-m^3}}.$$

Diese Gleichungen verwandeln sich dann in die Gleichungen 41.:

$$7) \quad \begin{cases} \mu\nu = m^3 t^2 + u(1-m^3) \\ \mu^3 + \nu^3 = m^3(1+m^3))\, t^3 + 3m^3(1-m^3)tu - 2(1-m^3)^2 v; \end{cases}$$

und zugleich gehen die letzten beiden Gleichungen 6. über in:

$$8) \quad \begin{cases} u' = -\frac{m}{1-m^3}(\mu^2 - \nu t) \\ 2v' = \frac{1}{(1-m^3)^2}[\nu^3 - (1-2m^3)\mu^3 + m^3 t^3 - 3m^3\mu\nu t]. \end{cases}$$

Schreibt man zugleich die Gleichungen 7. so, dass u und v durch μ, ν, t, m ausgedrückt erscheinen, so hat man

$$9) \ldots \begin{cases} u = \frac{1}{1-m^3}(\mu\nu - m^3 t^2) \\ 2v = \frac{1}{(1-m^3)^2}[m^3(1-2m^3)t^3 - \mu^3 - \nu^3 + 3m^3\mu\nu t]. \end{cases}$$

Aus 8. 9. zusammen findet man nun sofort:

$$10) \ldots \begin{cases} (1-m^3)(u - u') = (\mu - mt)(\nu + m\mu + m^2 t^2) \\ (1-m^3)(u - \varepsilon u') = (\mu - \varepsilon mt)(\nu + \varepsilon m\mu + \varepsilon^2 m^2 t^2) \\ (1-m^3)(u - \varepsilon^2 u') = (\mu - \varepsilon^2 mt)(\nu + \varepsilon^2 m\mu + \varepsilon m^2 t^2) \end{cases}$$

$$11) \quad \begin{cases} (1-m^3)(v+v') = -(\mu - mt)(\mu - \varepsilon mt)(\mu - \varepsilon^2 mt) \\ (1-m^3)^2(v-v') = -(\nu + m\mu + m^2t^2)(\nu + \varepsilon m\mu + \varepsilon^2 m^2 t^2)(\nu + \varepsilon^2 m\mu + \varepsilon m^2 t^2), \end{cases}$$

woraus die den Lösungen dieser Classe eigenthümliche Zerlegung der Ausdrücke $u^3 - u'^3$, $v^2 - v'^2$ direct ersichtlich ist.

§. 11.

Nachweis, dass je zwei der gefundenen Lösungen zweiter Classe identisch sind.

Die Gesammtzahl der zu der Lösung u, v gehörigen Lösungen zweiter Classe scheint hiernach 24 zu sein. Denn es giebt erstlich zwölf

Systeme der Grössen t, m^3; zu jedem gehören drei Paar von Ausdrücken μ, ν, die aus einem derselben erhalten werden, wenn man μ mit ε oder ε^2, und zugleich ν mit ε^2 oder ε multiplicirt. Was nun das Letzte, so wie die Ersetzung von m durch εm und $\varepsilon^2 m$ angeht, so sieht man, dass dadurch v' sich gar nicht ändert, und dass u' nur in $\varepsilon u'$ oder in $\varepsilon^2 u'$ übergeht. Für jedes der zwölf Systeme t, m^3 erhält man also nur zwei verschiedene Lösungen, insofern noch μ, ν mit einander vertauscht werden können; also würde man im Ganzen 24 Lösungen dieser Art erhalten.

Aber eine genauere Untersuchung lehrt, dass je zwei derselben einander gleich sind, so dass in der That nur 12 verschiedene Lösungen zweiter Classe existiren.

Soll nämlich dieselbe Lösung zweiter Classe bei u, v nochmals auftreten, wobei denn an Stelle der Grössen m, t, μ, ν andre Grössen m_1, t_1, μ_1, ν_1 eingeführt sein müssen, so müssen entweder die drei Factoren von $v+v'$ (11.) den entsprechenden der neuen Form, und ebenso die von $v-v'$ den entsprechenden in der neuen Form, bis auf constante Factoren gleich sein, oder es müssen die Factoren von $v+v'$ in der einen Form denen von $v-v'$ in der andern Form gleich sein. Da u' in beiden Formen nur um eine dritte Wurzel der Einheit verschieden sein kann, so ist die Art, wie man die drei Factoren der einen Form denen der andern entsprechen lassen muss, bis auf eine cyclische Versetzung bestimmt; und diese wieder würde nur einer Vermehrung von m oder m_1 um einen Factor ε oder ε^2 entsprechen, was unerheblich ist. Man kann also in dem einen Falle die Gleichungen anschreiben:

$$12)\quad \begin{aligned} \mu_1 - m_1 t_1 &= a(\mu - mt) & \nu_1 + m_1\mu_1 + m_1^2 t_1 &= \frac{1-m_1^3}{a(1-m^3)}(\nu + m\mu + m^2 t) \\ \mu_1 - \varepsilon m_1 t_1 &= a'(\mu - \varepsilon mt) & \nu_1 + \varepsilon m_1\mu_1 + \varepsilon^2 m_1^2 t_1 &= \frac{1-m_1^3}{a'(1-m^3)}(\nu + \varepsilon m\mu + \varepsilon^2 m^2 t) \\ \mu_1 - \varepsilon^2 m_1 t_1 &= a''(\mu - \varepsilon^2 mt) & \nu_1 + \varepsilon^2 m_1\mu_1 + \varepsilon m_1^2 t_1 &= \frac{1-m_1^3}{a''(1-m^3)}(\nu + \varepsilon^2 m\mu + \varepsilon m^2 t) \end{aligned}$$

$$13)\quad \ldots\ldots\quad a\,a'\,a'' = \frac{1-m_1^3}{1-m^3},$$

im zweiten Falle die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \nu_1 + m_1\mu_1 + m_1^2 t_1 = a(\mu - mt) & \mu_1 - m_1 t_1 = \frac{1-m_1^3}{a(1-m^3)}(\nu + m\mu + m^2 t) \\ 14) \quad \nu_1 + \varepsilon m_1\mu_1 + \varepsilon^2 m_1^2 t_1 = a'(\mu - \varepsilon mt) & \mu_1 - \varepsilon m_1 t_1 = \frac{1-m_1^3}{a'(1-m^3)}(\nu + \varepsilon m\mu + \varepsilon^2 m^2 t) \\ \nu_1 + \varepsilon^2 m_1\mu_1 + \varepsilon m_1^2 t_1 = a''(\mu - \varepsilon^2 mt) & \mu_1 - \varepsilon^2 m_1 t_1 = \frac{1-m_1^3}{a''(1-m^3)}(\nu + \varepsilon^2 m\mu + \varepsilon m^2 t), \end{array}$$

$$15) \quad . \; . \; . \; . \quad a a' a'' = \frac{(1-m_1^3)^2}{1-m^3},$$

wobei die a, a', a'' jedesmal Constante bedeuten.

Was nun zunächst die Gleichungen 12. betrifft, so folgt aus den ersten derselben:

$$a(\mu - mt) + \varepsilon a'(\mu - \varepsilon mt) + \varepsilon^2 a''(\mu - \varepsilon^2 mt) = 0,$$

und da die beiden linearen Functionen μ, t verschieden sind:

$$a + \varepsilon a' + \varepsilon^2 a'' = 0$$
$$a + \varepsilon^2 a' + \varepsilon a'' = 0,$$

oder, was dasselbe ist, $a = a' = a''$. Die drei letzten Gleichungen 12. aber geben dann sofort:

$$\nu_1 = \frac{1-m_1^3}{a(1-m^3)}\nu, \qquad m_1\mu_1 = \frac{1-m_1^3}{a(1-m^3)} m\mu, \qquad m_1^2 t_1 = \frac{1-m_1^3}{a(1-m^3)} m^2 t,$$

während aus den ersten noch

$$\mu_1 = a\mu, \qquad m_1 t_1 = amt$$

folgt. Die Vergleichung der Ausdrücke für $\frac{\mu_1}{\mu}$ giebt

$$a^2 = \frac{m}{m_1}\frac{1-m_1^3}{1-m^3},$$

und zugleich 13.:

$$a^3 = \frac{1-m_1^3}{1-m^3}.$$

Daher ist $a = \frac{m_1}{m}$, und wenn man dies in die letzte Gleichung einführt, $m_1^3 = m^3$. Die Gleichungen 12. 13. führen also auf keine Grössen t_1, μ_1, ν_1, m_1, welche von den Grössen t, μ, ν, m wesentlich verschieden sind.

Ganz anders ist es mit den Gleichungen 14. 15. Aus den ersten drei Gleichungen 14. folgt:

$$16) \quad . \; . \quad \begin{array}{l} 3\nu_1 = (a + a' + a'')\mu - (a + \varepsilon a' + \varepsilon^2 a'')mt \\ 3m_1\mu_1 = (a + \varepsilon^2 a' + \varepsilon a'')\mu - (a + a' + a'')mt \\ 3m_1^2 t_1 = (a + \varepsilon a' + \varepsilon^2 a'')\mu - (a + \varepsilon^2 a' + \varepsilon a'')mt. \end{array}$$

Führt man dies in die drei letzten Gleichungen 14. ein, so verwandeln sich diese in folgende:

$$\frac{1-m_1^3}{1-m^3}(\nu + m\mu + m^2 t) = \frac{\varepsilon . 1-\varepsilon}{3}\,\frac{a}{m_1}\,[(a''-a')\,\mu + (\varepsilon a' - \varepsilon^2 a'')\,m t]$$

$$\frac{1-m_1^3}{1-m^3}(\nu + \varepsilon\, m\mu + \varepsilon^2 m^2 t) = \frac{\varepsilon . 1-\varepsilon}{3}\,\frac{a'}{m_1}\,[(a-a'')\,\varepsilon^2\mu + (\varepsilon a'' - \varepsilon^2 a)\,m t]$$

$$\frac{1-m_1^3}{1-m^3}(\nu + \varepsilon^2 m\mu + \varepsilon m^2 t) = \frac{\varepsilon . 1-\varepsilon}{3}\,\frac{a''}{m_1}\,[(a'-a)\,\varepsilon\,\mu + (\varepsilon a - \varepsilon^2 a')\,m t].$$

Multiplicirt man diese Gleichungen beziehungsweise mit 1, 1, 1 oder mit 1, ε^2, ε, oder mit 1, ε, ε^2 und addirt jedesmal, so erhält man:

$$17)\quad \begin{cases} 3\,\frac{1-m_1^3}{1-m^3}\,\nu = -\frac{1}{m_1}[(a'a''+\varepsilon^2 a''a+\varepsilon a a')\mu+(a'a''+a''a+aa')mt] \\ 3\,\frac{1-m_1^3}{1-m^3}\,m\mu = \frac{\mu}{m_1}(a'a''+\varepsilon a''a+\varepsilon^2 aa') \\ 3\,\frac{1-m_1^3}{1-m^3}\,m^2 t = \frac{mt}{m_1}(a'a''+\varepsilon a''a+\varepsilon^2 aa'). \end{cases}$$

Man sieht, dass die letzten beiden Gleichungen sich auf die eine, nur noch zwischen Constanten bestehende, reduciren:

$$18)\quad .\ .\ a'a'' + \varepsilon a''a + \varepsilon^2 aa' = 3mm_1\,\frac{1-m_1^3}{1-m^3}.$$

Die erste der Gleichungen 17. hingegen muss auf die zwischen den drei linearen Functionen ν, μ, t bestehende Identität:

$$\nu(\mu t) + \mu(t\nu) + t(\nu\mu) = 0$$

zurückkommen; und man kann also, indem man durch $\varkappa$ einen unbestimmten Factor bezeichnet, setzen:

$$19)\quad .\ .\ \begin{cases} a'a'' + \varepsilon^2 a''a + \varepsilon aa' = \varkappa\,(t\nu) \\ a'a'' + a''a + aa' = \frac{\varkappa}{m}(\nu\mu) \\ 3m_1\,\frac{1-m_1^3}{1-m^3} = \varkappa\,(\mu t). \end{cases}$$

Der Gleichung 18. kann man nun auch die Gestalt geben:

$$20)\quad .\ .\ .\ .\ a'a'' + \varepsilon a''a + \varepsilon^2 aa' = \varkappa m\,(\mu t),$$

und aus 19. 20. erhält man sodann:

$$21)\quad \begin{cases} a'a'' = \frac{m_1}{(\mu t)}\cdot\frac{1-m_1^3}{1-m^3}\left[\frac{(\nu\mu)}{m} + m(\mu t) + (t\nu)\right] \\ a''a = \frac{m_1}{(\mu t)}\cdot\frac{1-m_1^3}{1-m^3}\left[\frac{(\nu\mu)}{m} + \varepsilon^2 m(\mu t) + \varepsilon\,(t\nu)\right] \\ aa' = \frac{m_1}{(\mu t)}\cdot\frac{1-m_1^3}{1-m^3}\left[\frac{(\nu\mu)}{m} + \varepsilon\, m(\mu t) + \varepsilon^2(t\nu)\right]. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen, und führt statt der linken Seite ihren Werth aus 15. ein, so findet man endlich:

$$\frac{(1-m_1^3)^4}{(1-m^3)^3} = \frac{m_1^3}{(\mu t)^3} \cdot \frac{(1-m_1^3)^3}{(1-m^3)^3}\left[\frac{(\nu\mu)^3}{m^3} + m^3(\mu t)^3 + (t\nu)^3 - 3(\nu\mu)(\mu t)(t\nu)\right],$$

so dass sich m_1^3 linear aus der Gleichung bestimmt:

$$\frac{1}{m_1^3} = \frac{1}{(1-m^3)(\mu t)^3}\left[\frac{(\nu\mu)^3}{m^3} + (\mu t)^3 + (t\nu)^3 - 3(\nu\mu)(\mu t)(t\nu)\right].$$

Es giebt also in der That *ein* System m_1, μ_1, ν_1, t_1, welches dieselbe Lösung zweiter Classe nochmals liefert, und damit ist bewiesen, dass die Gesammtzahl aller Lösungen zweiter Classe nur zwölf ist.

Aber zugleich ist es leicht, sich über die anderweitigen Beziehungen solcher Lösungen des Problems 7., welche auf dieselbe Lösung zweiter Classe führen, Klarheit zu verschaffen. Zu diesem Zwecke braucht man nur aus 16. die Gleichung zu bilden:

$$\begin{aligned} 81 m_1^5 (\mu_1 t_1)(\nu_1 t_1) = -m^2(\mu t)^2 &\cdot \left[(a+a'+a'')(a+\varepsilon^2 a'+\varepsilon a'') - (a+\varepsilon a'+\varepsilon^2 a'')^2\right] \\ &\cdot \left[(a+a'+a'')(a+\varepsilon a'+\varepsilon^2 a'') - (a+\varepsilon^2 a'+\varepsilon a'')^2\right] \end{aligned}$$

oder:

$$9 m_1^5 (\mu_1 t_1)(\nu_1 t_1) = -m^2(\mu t)^2 (a'a'' + \varepsilon a'' a + \varepsilon^2 a a')(a'a'' + \varepsilon^2 a'' a + \varepsilon a a').$$

Führt man rechts die Werthe 19. 20. ein, so ergiebt sich sofort:

22) . . . . $$\frac{m_1^3 (\mu_1 t_1)(\nu_1 t_1)}{(1-m_1^3)^2} = \frac{m^3 (\mu t)(\nu t)}{(1-m^3)^2}.$$

Nun ist wegen der ersten Gleichung 7.

$$(\mu t)(\nu t) = u(1-m^3),$$

wenn in u die Grössen $-x_2, x_1$ durch die Coefficienten von t ersetzt werden; ebenso also

$$(\mu_1 t_1)(\nu_1 t_1) = u(1-m_1^3),$$

wenn in u die Grössen $-x_2, x_1$ durch die Coefficienten von t_1 ersetzt werden. Bezüglich dieser Werthe von u lehren aber die Gleichungen 47. 52. §. 7., in denen für die x diese Grössen gesetzt waren, dass

$$\frac{(\mu t)(\nu t) m^3}{(1-m^3)^2} = \frac{u m^3}{1-m^3} = -\frac{p u}{v} = -\left(\frac{c}{3} + \frac{A_{uu}}{2}\right).$$

und für die mit $\mu_1, \gamma_1, t_1, m_1$ gebildeten Ausdrücke erhält man denselben Werth. Die Gleichung 22. lehrt also, dass zwei Lösungen des

6*

Problems 7., welche auf dieselbe Lösung zweiter Classe führen, derselben Wurzel σ der biquadratischen Gleichung zugeordnet sind.

Die drei Lösungen des Problems 7., welche aus der einer Wurzel σ der biquadratischen Gleichung zugehörigen cubischen Gleichung 52. entspringen, führen also auf 6 Lösungen zweiter Classe, welche aber paarweise gleich sind, und also nur drei von einander verschiedene bilden. *Vergleicht man die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung mit den vier Wendepunctsdreiecken einer Curve dritter Ordnung, die Lösungen der cubischen Gleichung 52. mit den Seiten eines Wendepunctsdreiecks, so muss man die zwölf Lösungen zweiter Classe mit den zwölf Ecken der Wendepunctsdreiecke vergleichen.* Dieselben bilden vier Gruppen zu drei; von solchen drei ist jede zwei Lösungen des Problems 7. in gleicher Weise zugeordnet, entsprechend einer Ecke eines Wendepunctsdreiecks, welche zu dessen in ihr zusammenstossenden Seiten in der gleichen Beziehung steht.

§. 12.

Gruppirung der Lösungen, wenn eine andere Lösung u, v zu Grunde gelegt wird. Quadrupel.

Wir haben bis jetzt ausschliesslich die Gruppirung der Wurzeln der Gleichung, auf welche unser Problem führt, untersucht, insofern alle übrigen Wurzeln einer gegebenen gegenüber sich verschieden verhielten. Wir haben gesehen, dass 39 andre Wurzeln existiren, so dass also die ursprüngliche Gleichung vom vierzigsten Grade sein muss. Die 39 Wurzeln bilden zwei getrennte Gruppen, 27 Wurzeln erster, 12 Wurzeln zweiter Classe. Die 27 Wurzeln erster Classe bilden neun Tripel, die durch eine Hessesche Gleichung gefunden werden; die Wurzeln eines solchen Tripels vorausgesetzt, ordnen sich die jedes der übrigen acht Tripel denselben eindeutig zu. Die neun Tripel bilden zwölf conjugirte Systeme zu dreien, welche wieder vier Gruppen zu drei bilden, den Wendepunctsseiten einer Curve dritter Ordnung analog. Die 12 Lösungen zweiter Classe bilden ebenso vier Gruppen zu drei, analog den Ecken der Wendepunctsdreiecke.

Ich will jetzt untersuchen, wie diese Gruppirung sich ändert, wenn man statt der bisher angenommnen Lösung u, v eine andere zu Grunde legt. Es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die neue Fundamentallösung in Bezug auf die erste von der ersten oder von der zweiten Classe war.

Setzen wir voraus, die neue Fundamentallösung u', v' sei eine Lösung erster Classe in Bezug auf u, v gewesen. Indem wir das Verhalten der übrigen Wurzeln untersuchen, sind wieder eine Reihe von Fällen zu unterscheiden.

Aus der Definition selbst, welche wir für Lösungen erster Classe zu Grunde gelegt haben, folgt ein Reciprocitätsverhältniss zwischen je zwei Lösungen, der Art, dass, wenn u', v' in Bezug auf u, v zur ersten Classe gehörte, auch u, v in Bezug auf u', v' zur ersten Classe gehört; und ebenso, wenn eine Lösung der andern gegenüber zweiter Classe war, ist auch die letztere in Bezug auf die erste von der zweiten Classe.

Nehmen wir an, es seien u', v' (vgl. §. 2) durch die Gleichungen gegeben:

$$1) \quad . \quad . \quad \begin{cases} u' = u - \xi^2 - \xi\eta - \eta^2 \\ 2v' = \varepsilon(\varepsilon - 1)\,[(\xi + 2\eta)\,u - (\xi + \eta)(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2)], \end{cases}$$

während

$$2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^3.$$

Analog sei irgend eine Lösung, welche in Bezug auf u', v' von der ersten Classe ist, durch die Gleichungen gegeben:

$$3) \quad . \quad . \quad \begin{cases} u'' = u' - \xi'^2 - \xi'\eta' - \eta'^2 \\ 2v'' = \varepsilon(\varepsilon - 1)\,[(\xi' + 2\eta')\,u' - (\xi' + \eta')(\xi'^2 + \xi'\eta' + \eta'^2)], \end{cases}$$

wobei ξ', η' durch die Gleichung bestimmt werden:

$$4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2v' = 3u'\xi' - \xi'^3 + \eta'^3.$$

Die Gleichung 4. aber wird durch die Annahme befriedigt:

$$5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \xi' = \frac{\varepsilon \,.\, \varepsilon - 1}{3}(\xi + 2\eta), \qquad \eta' = \frac{\varepsilon \,.\, \varepsilon - 1}{3}(\xi - \eta),$$

aus welcher umgekehrt folgt (da $\varepsilon^2(\varepsilon - 1)^2 = -3$):

$$\xi = -\frac{\varepsilon.\varepsilon-1}{3}(\xi' + 2\eta'), \qquad \eta = -\frac{\varepsilon.\varepsilon-1}{3}(\xi' - \eta');$$

und indem man dies in 3. einführt, findet man

$$u'' = u, \qquad v'' = -v.$$

Durch die Ausdrücke 5. ist also die ursprüngliche Fundamentallösung selbst gegeben.

Setzt man aber an Stelle des Ausdrucks 5. für η' den Werth $\varepsilon\eta'$ oder $\varepsilon^2\eta'$, so erhält man

$$u'' = u - \xi^2 - \varepsilon^2\xi\eta - \varepsilon\eta^2$$

oder

$$u'' = u - \xi^2 - \varepsilon\xi\eta - \varepsilon^2\eta^2.$$

Man hat also den Satz:

Wenn man statt der Lösung u, v eine Lösung erster Classe u', v' zu Grunde legt, so bildet u, v mit denjenigen beiden Lösungen ein zu u', v' gehöriges Tripel erster Classe, welche früher mit u', v' ein zu u, v gehöriges Tripel erster Classe bildeten.

Dabei ist zu beachten, dass die früher durch ξ, $\varepsilon\eta$; ξ, $\varepsilon^2\eta$ characterisirten Lösungen jetzt in die durch ξ', $\varepsilon^2\eta'$; ξ', $\varepsilon\eta'$ characterisirten übergegangen sind, also in ihrem Verhalten eine Vertauschung erfahren haben.

Eine beliebige Lösung bildet, wie man aus den obigen sieht, mit drei Lösungen, welche in Bezug auf sie ein Tripel erster Classe bilden, ein eigenthümliches System. Es ist dadurch characterisirt, *dass, wenn man irgend eine solcher vier Lösungen zu Grunde legt, die drei andern immer ein zugehöriges Tripel erster Classe bilden.* Ein solches System von vier Lösungen soll ein *Quadrupel* genannt werden.

Es giebt neunzig Quadrupel. Denn da jede Lösung auf neun Tripel führt, so giebt es 40.9 Combinationen einer Lösung mit denen eines zugehörigen Tripels. Aber nach dem obigen Satze kommt jede dieser Verbindungen vier mal vor, und die Anzahl der Quadrupel ist also jene Zahl, dividirt durch 4.

§. 13.

Bestimmung der Lösungen, welche aus der ersten Classe in die zweite übergehn und umgekehrt.

Untersuchen wir nun das Verhalten eine Lösung u'', v'', welche erster Classe in Bezug auf u, v war, welche aber nicht mit u', v' in einem Tripel vereinigt war. In der auf u, v bezüglichen Anordnung betrachte ich die conjugirten Tripel, deren eines die Lösung u', v', und von denen ein zweites die Lösung u'', v'' enthält. Sie sind durch ein System m, t characterisirt, und zwar so, dass wenn

$$\eta = m(\xi + t)$$

gesetzt wird, die Lösung u'', v'' durch ξ_1 und

$$\eta_1 = \varepsilon^i m(\xi_1 + t)$$

bestimmt ist, wo $i = 0$ oder i von Null verschieden, jenachdem die Lösung u'', v'' in ihrem Tripel der Lösung u', v' in dem ihrigen zugeordnet war oder nicht (vgl. §. 9.). Diese beiden Fälle müssen getrennt behandelt werden.

1. Es sei i von Null verschieden. Ich will in diesem Fall zunächst $i = 1$ setzen; um zu dem Fall $i = 2$ überzugehen, hat man nur schliesslich ε durch ε^2 zu ersetzen und, weil dann zugleich $\varepsilon(\varepsilon - 1)$ sein Zeichen ändert, die Vorzeichen von v' und v'' zu ändern. Man hat die Gleichungen (§. 2.).

$$6)\quad \begin{cases} u' = u - \xi^2 - m\xi(\xi + t) - m^2(\xi + t)^2 \\ u'' = u - \xi_1^2 - \varepsilon m \xi_1(\xi_1 + t) - \varepsilon^2 m^2 (\xi_1 + t)^2 \\ 2v' = \varepsilon(\varepsilon - 1)[(\xi + 2m(\xi + t))u - (\xi^3 + 2m\xi^2(\xi + t) + 2m^2\xi(\xi + t)^2 + m^3(\xi + t)^3)] \\ 2v'' = \varepsilon(\varepsilon - 1)[(\xi_1 + 2\varepsilon m(\xi_1 + t))u - (\xi_1^3 + 2\varepsilon m\xi_1^2(\xi_1 + t) + 2\varepsilon^2 m^2 \xi_1(\xi_1 + t)^2 + m^3(\xi_1 + t)^3)]. \end{cases}$$

Ausserdem kann man noch u und v selbst durch die sieben unabhängige Constante enthaltenden Ausdrücke m, ξ, ξ_1, t darstellen. In der That geben die beiden Gleichungen

$$2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^3$$
$$2v = 3u\xi_1 - \xi_1^3 + \eta_1^3,$$

indem man sie nach u und v auflöst:

$$3u = \xi^2 + \xi\xi_1 + \xi_1^2 - \frac{\eta^3 - \eta_1^3}{\xi - \xi_1}$$
$$2v = \xi\xi_1(\xi + \xi_1) - \frac{\eta^3\xi_1 - \eta_1^3\xi}{\xi - \xi_1},$$

oder wenn man die Division ausführt, nachdem man für η, η_1 ihre Werthe

$$\eta = m(\xi + t), \qquad \eta_1 = \varepsilon m(\xi_1 + t)$$

gesetzt hat:

$$7) \quad \begin{aligned} 3u &= (\xi^2 + \xi\xi_1 + \xi_1^2)(1 - m^3) - 3m^3t(\xi + \xi_1) - 3m^3t^2 \\ 2v &= \xi\xi_1(\xi + \xi_1)(1 - m^3) - 3m^3t\xi\xi_1 + m^3t^3. \end{aligned}$$

Man erhält mit Benutzung der Gleichungen 6. 7. nun folgende Zerlegungen:

$$8) \begin{cases} v' + v'' = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)}{3}(u' - u'')(1 - \varepsilon^2 m)[(\xi + t)(1 - \varepsilon m) - (\xi_1 + t)(1 - m)] \\ v' - v'' = (\varepsilon - 1)\frac{u' - \varepsilon^2 u''}{1 - \varepsilon^2 m}[\varepsilon m^2 t - (1 - \varepsilon)\frac{\xi(1 + m + m^2) - \varepsilon^2\xi_1(1 + \varepsilon m + \varepsilon^2 m^2)}{3}] \\ u' - \varepsilon u'' = -\varepsilon^2[(\xi + t)(1 - \varepsilon m) - (\xi_1 + t)(1 - m)][\varepsilon m^2 t - (1 - \varepsilon)\frac{\xi(1 + m + m^2) - \varepsilon^2\xi_1(1 + \varepsilon m + \varepsilon^2 m^2)}{3}]. \end{cases}$$

Diese Gleichungen lehren, dass die Lösung u'', v'' in Bezug auf die Lösung u', v' von der ersten Classe ist, und man hat also den Satz:

Ist die Lösung u', v' von der ersten Classe in Bezug auf u, v, und u'', v'' ebenso, ist aber u'', v'' nicht demselben Tripel wie u', v' angehörig, und auch nicht, wenn man auf den Tripel u', v' die übrigen bezieht (§. 9), *in seinem Tripel der Lösung u', v' zugeordnet, so ist u'', v'' auch erster Classe in Bezug auf u', v'.*

2. Ist dagegen $i = 0$, so dass statt der Gleichungen 6. folgende zu setzen sind:

$$9) \begin{cases} u' = u - \xi^2 - m\xi(\xi + t) - m^2(\xi + t)^2 \\ u'' = u - \xi_1^2 - m\xi_1(\xi_1 + t) - m^2(\xi_1 + t)^2 \\ 2v' = \varepsilon(\varepsilon - 1)[(\xi + 2m(\xi + t))u - (\xi^3 + 2m\xi^2(\xi + t) + 2m^2\xi(\xi + t)^2 + m^3(\xi + t)^3)] \\ 2v'' = \varepsilon(\varepsilon - 1)[(\xi_1 + 2m(\xi_1 + t))u - (\xi_1^3 + 2m\xi_1^2(\xi_1 + t) + 2m^2\xi_1(\xi_1 + t)^2 + m^3(\xi_1 + t)^3)], \end{cases}$$

so hat man die Zerlegungen:

$$10) \begin{cases} u' - u'' = (\xi_1 - \xi)[(\xi_1 + \xi)(1 + m + m^2) + mt(1 + 2m)] \\ u' - \varepsilon u'' = ((\xi - \varepsilon^2\xi_1)(1 + m + m^2) - \varepsilon^2(1 - \varepsilon)m(m + 1)t).(\frac{\xi - \varepsilon\xi_1}{3}(1 - m)(1 - \varepsilon) - (\xi + \varepsilon^2\xi_1) + \varepsilon m) \\ u' - \varepsilon^2 u'' = ((\xi - \varepsilon\xi_1)(1 + m + m^2) - \varepsilon(1 - \varepsilon^2)m(m + 1)t).(\frac{\xi - \varepsilon^2\xi_1}{3}(1 - m)(1 - \varepsilon^2) - (\xi + \varepsilon\xi_1) + \varepsilon^2 mt). \end{cases}$$

$$11)\quad \begin{cases} v'-v'' = -\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}(\xi_1-\xi)\,.\,[(\xi-\varepsilon^2\xi_1)(1+m+m^2)-\varepsilon^2(1-\varepsilon)m(m+1)t] \\ \qquad\qquad .\,[(\xi-\varepsilon\,\xi_1)(1+m+m^2)-\varepsilon\,(1-\varepsilon^2)m(m+1)t] \\ v'+v'' = \qquad \varepsilon(\varepsilon-1)\;[(\xi_1+\xi)(1+m+m^2)+mt(1+2m)] \\ \qquad\qquad .\,[\frac{\xi-\varepsilon\xi_1}{3}(1-m)(1-\varepsilon)-(\xi+\varepsilon^2\xi_1)+\varepsilon mt] \\ \qquad\qquad .\,[\frac{\xi-\varepsilon^2\xi_1}{3}(1-m)(1-\varepsilon^2)-(\xi+\varepsilon\,\xi_1)+\varepsilon^2 mt]. \end{cases}$$

Die Lösung u'', v'' ist also in Bezug auf u', v' zweiter Classe, und man hat daher den Satz:

Ist u', v' erster Classe in Bezug auf u, v, und u'', v'' ebenfalls, aber einem andern Tripel angehörig; ist endlich bei der Beziehung der Tripel auf einander die Lösung u'', v'' der Lösung u', v' zugeordnet, so ist u'', v'' zweiter Classe in Bezug auf u', v'.

Ferner also:

Wenn man statt einer Lösung u, v eine andere zu Grunde legt, welche in Bezug auf jene von der ersten Classe ist, so gehen 8 Lösungen aus der ersten Classe in die zweite über und umgekehrt.

Kehren wir zu den Gleichungen 8. zurück. Um diese mit den Gleichungen 1. §. 2. völlig in Uebereinstimmung zu bringen, muss man an Stelle der Lösung u'', v'' die von ihr nur äusserlich verschiedene Lösung $\varepsilon u''$, $-v''$ betrachten. Alsdann nehmen in der That die Gleichungen 8. die Gestalt an:

$$12)\quad .\ .\ \begin{aligned} v'+(-v'') &= (\Xi-\varepsilon\,H)(u'-\varepsilon\,.\,\varepsilon u'') \\ v'-(-v'') &= (\Xi-\varepsilon^2 H)(u'-\varepsilon^2\,.\,\varepsilon u'') \\ u-\varepsilon u'' &= (\Xi-\varepsilon\,H)(\Xi-\varepsilon^2 H), \end{aligned}$$

wo

$$13)\quad \begin{aligned} \Xi-\varepsilon\,H &= (\varepsilon-1)[\frac{\varepsilon m^2 t}{1-\varepsilon^2 m}-(1-\varepsilon)\frac{\xi(1-\varepsilon m)-\varepsilon^2\xi_1(1-m)}{3}] \\ \Xi-\varepsilon^2 H &= \frac{\varepsilon\,.\,\varepsilon-1}{3}(1-\varepsilon^2 m)[(\xi+t)(1-\varepsilon m)-(\xi_1+t)(1-m)]. \end{aligned}$$

Setzen wir dagegen, wie oben vorgesehen war, in 8. ε^2 statt ε und ändern die Vorzeichen von v' und v'', so hat man zunächst

$$v' + v'' = \frac{\varepsilon . \overline{\varepsilon - 1}}{3} (u' - u'') (1 - \varepsilon m) ((\xi + t) (1 - \varepsilon^2 m) - (\xi_1 + t) (1 - m))$$

$$v' - v'' = \varepsilon (\varepsilon - 1) (u' - \varepsilon u'') \left(\frac{m^2 t}{1 - \varepsilon m} + (1 - \varepsilon) \frac{\xi (1 - \varepsilon^2 m) - \varepsilon \xi_1 (1 - m)}{3}\right)$$

$$u - \varepsilon^2 u'' = -[(\xi + t) (1 - \varepsilon^2 m) - (\xi_1 + t) (1 - m)] \left[m^2 t + (1 - \varepsilon) \frac{\xi (1 + m + m^2) - \varepsilon \xi_1 (1 + \varepsilon^2 m + \varepsilon m^2)}{3}\right],$$

Gleichungen, welche man in die Form kleiden kann:

$$14) \quad \begin{aligned} v' + v'' &= (\Xi' - \varepsilon H') (u' - \varepsilon . \varepsilon^2 u'') \\ v' - v'' &= (\Xi' - \varepsilon^2 H') (u' - \varepsilon^2 . \varepsilon^2 u'') \\ u - \varepsilon^2 u'' &= (\Xi - \varepsilon H') (\Xi' - \varepsilon^2 H'), \end{aligned}$$

wo denn:

$$15) \quad \begin{aligned} \Xi' - \varepsilon H' &= \frac{\varepsilon . \overline{\varepsilon - 1}}{3} (1 - \varepsilon m) [(\xi + t) (1 - \varepsilon^2 m) - (\xi_1 + t) (1 - m)] \\ \Xi' - \varepsilon^2 H' &= \varepsilon . \overline{\varepsilon - 1} . \left[\frac{m^2 t}{1 - \varepsilon m} + (1 - \varepsilon) \frac{\xi (1 - \varepsilon^2 m) - \varepsilon \xi_1 (1 - m)}{3}\right]. \end{aligned}$$

Die Gleichungen gehen aus 13. unmittelbar hervor, wenn man ε, Ξ, H durch ε^2, $-\Xi'$, $-H'$ ersetzt.

Die Paare linearer Ausdrücke Ξ, H; Ξ', H' etc. sind es, welche, indem man die Lösung u', v' zum Ausgange nimmt, die Stelle der früher durch ξ, η bezeichneten Ausdrücke versehen, und also die Lösungen der neuen Hesseschen Gleichung sind, auf welche das in der Gleichung

$$16) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2 v' = 3 u' \Xi - \Xi^3 + H^3$$

enthaltene Transformationsproblem führt.

Ich werde nun zeigen, wie die Lösungen der neuen Hesseschen Gleichung mit denen der frühern zusammenhängen, und wie insbesondere die an Stelle von m erscheinenden Grössen m' mit den m durch eine sehr einfache Beziehung verbunden sind.

Zunächst kennen wir bereits eine Lösung der Gleichung 16.; es ist diejenige, deren entsprechendes Tripel die ursprünglich zu Grunde gelegte Lösung u, v enthält. Für sie ist nach 5. statt Ξ, H zu setzen:

$$17) \quad \begin{aligned} \xi' &= \frac{\varepsilon . \overline{\varepsilon - 1}}{3} (\xi + 2 \eta), & \eta' &= \frac{\varepsilon . \overline{\varepsilon - 1}}{3} (\xi - \eta). \\ &= \frac{\varepsilon . \overline{\varepsilon - 1}}{3} (\xi + 2 m (\xi + t)), & &= \frac{\varepsilon . \overline{\varepsilon - 1}}{3} (\xi - m (\xi + t)). \end{aligned}$$

Indem man diese Ausdrücke benutzt, findet man aus 13. und 15.:

$$18)\quad \begin{aligned} \Xi - \xi' &= \frac{(1-m)^2}{3}(\xi_1 - \varepsilon\, \xi) - \frac{\varepsilon\,.\,\varepsilon - 1}{3}\,\frac{m(1-m)(1+\varepsilon m)}{1-\varepsilon^2 m}\,t \\ \Xi' - \xi' &= -\frac{(1-m)^2}{3}(\xi_1 - \varepsilon^2 \xi) - \frac{\varepsilon\,.\,\varepsilon - 1}{3}\,\frac{m(1-m)(1+\varepsilon^2 m)}{1-\varepsilon m}\,t, \end{aligned}$$

und

$$19)\quad .\ .\ \begin{cases} \eta' - \varepsilon\, H = \dfrac{m+2}{m-1}(\xi' - \Xi) \\ \eta' - \varepsilon^2 H' = \dfrac{m+2}{m-1}(\xi' - \Xi'). \end{cases}$$

Setzt man also:

$$20)\quad m' = \frac{m+2}{m-1}, \qquad T = -\,\varepsilon(\varepsilon - 1)\,\frac{(m^2+m+1)\xi + m(m+1)t}{m+2},$$

so hat man:

$$21)\quad .\ .\ .\ .\ \begin{cases} \eta' = \quad m'(\xi' + T) \\ H = \varepsilon^2 m'(\Xi + T) \\ H' = \varepsilon\, m'(\Xi' + T). \end{cases}$$

Führt man in 18. für ξ, ξ_1 ihre Werthe in t, μ, ν ein (vgl. §. 7., 40.), indem man für die drei conjugirten Tripeln zugehörigen ξ setzt:

$$22)\quad .\ .\ .\ .\ \begin{cases} \xi = \dfrac{m^3 t + \mu + \nu}{1 - m^3} \\ \xi_1 = \dfrac{m^3 t + \varepsilon\mu + \varepsilon^2\nu}{1 - m^3} \\ \xi_2 = \dfrac{m^3 t + \varepsilon^2\mu + \varepsilon\nu}{1 - m^3}, \end{cases}$$

so verwandeln jene Gleichungen sich in die folgenden, wesentlich vereinfachten:

$$23)\quad .\ .\ \begin{cases} \Xi - \xi' = \dfrac{\varepsilon\,.\,\varepsilon - 1}{3}\,\dfrac{1-m}{1+m+m^2}(\nu - m t) \\ \Xi' - \xi' = \dfrac{\varepsilon\,.\,\varepsilon - 1}{3}\,\dfrac{1-m}{1+m+m^2}(\mu - m t). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen sieht man, dass bei dem Uebergange von ξ_1 zu ξ_2, also bei Vertauschung von μ und ν, nur eine Vertauschung von Ξ mit Ξ' stattfindet. Betrachten wir also jetzt im Zusammenhange die neun Lösungen, welche drei conjugirten Tripeln angehören, in deren einem die jetzt bevorzugte Lösung u', v' vorkommt. In Bezug auf dieses Tripel, das in Bezug auf u, v durch die Systeme

$$\xi,\ \eta = m(\xi + t);\quad \xi,\ \varepsilon\eta;\quad \xi,\ \varepsilon^2\eta$$

characterisirt ist, geordnet, sind die Lösungen der beiden andern Tripel characterisirt durch

$$\xi_1, \eta_1 = m(\xi_1 + t);\ \xi_1, \varepsilon\eta_1;\ \xi_1, \varepsilon^2\eta_1$$
$$\xi_2, \eta_2 = m(\xi_2 + t);\ \xi_2, \varepsilon\eta_2;\ \xi_2, \varepsilon^2\eta_2.$$

Indem man nun die Lösung ξ, η zu Grunde legt, tritt nach dem Vorigen (§. 12) für u', v' die Lösung u, v in das erste Tripel ein, und wird durch ξ', η' characterisirt, so dass die Lösungen eines ersten Tripels jetzt durch

$$\xi', \eta' = m'(\xi' + T);\ \xi', \varepsilon^2\eta';\ \xi', \varepsilon\eta'$$

gegeben sind. Von den beiden andern der obigen Tripel fällt jedesmal die erste Lösung aus, indem sie zweiter Classe wird; die andern sind jetzt characterisirt durch:

$$\Xi, \varepsilon^2 m'(\Xi + T);\ \Xi', \varepsilon m'(\Xi' + T)$$
$$\Xi', \varepsilon^2 m'(\Xi' + T);\ \Xi, \varepsilon m'(\Xi + T).$$

Man hat also folgenden Satz:

Aus zwei Tripeln, die mit dem u', v' enthaltenden Tripel conjugirt waren, scheiden die dem u', v' selbst entsprechenden Lösungen aus der ersten Classe aus; die andern bilden je zwei Lösungen neuer Tripel, doch so, dass in einem neuen Tripel weder Lösungen desselben alten Tripels, noch zwei in Bezug auf u', v' in den alten Tripeln gleichartig zugeordnete auftreten. Diese neuen Tripel sind wieder dem neuen Tripel conjugirt, welcher aus dem früher u', v' enthaltenden durch Eintritt von u, v entstand; und zwar sind die zurückgebliebenen Lösungen der drei neuen Tripel einander genau ebenso zugeordnet, wie dies in den alten Tripeln der Fall war.

Bemerken wir ferner Folgendes. Wenn man von einer Lösung u, v ausging, und eine Lösung erster Classe u', v' als bekannt annahm, so erhielt man die vier Paare von Tripeln, welche dem u', v' enthaltenden conjugirt waren, durch eine Gleichung vierten Grades in m (§. 5.), welche durch eine lineare Substitution in die biquadratische Resolvente der Hesseschen Gleichung überging. Legt man statt dessen u', v' zu Grunde, und benutzt u, v als bekannte Lösung erster Classe, so werden die neuen Tripel durch eine biquadratische Gleichung in m' gegeben, welche dann

durch eine lineare Substitution wieder in die neue Hessesche Gleichung übergeführt werden kann. *Die vier Wurzeln der Gleichung in m' sind mit den vier Wurzeln der Gleichung in m durch die einfache lineare Beziehung verbunden* (20.):

$$m' = \frac{m+2}{m-1},$$

welche zugleich reciprok ist. In ähnlicher Weise sind hienach die Wurzeln der Hesseschen Gleichungen einzeln und linear verbunden. Die absolute Invariante der Hesseschen Gleichung ändert sich also nicht, wenn man statt u, v eine andre Lösung zum Ausgange nimmt; auch beschränkt sich dies nicht auf die Lösungen erster Classe in Bezug auf u, v, da die Lösungen zweiter Classe allmälig in die erster Classe eintreten. In der That haben wir oben gefunden, dass $\frac{i^3}{j^2}$ für diese Gleichung immer den Werth 0 hat.

Es entsteht nun die Frage, welche Lösungen zweiter Classe es sind, die in die vorhin gebildeten neuen conjugirten Tripel ergänzend eintreten. Dieselben sind durch die linearen Ausdrücke

$$\Xi,\ m'(\Xi + T);\ \Xi',\ m'(\Xi' + T)$$

characterisirt, und sind U, U' die Functionen zweiten Grades, welche in ihnen die Stelle von u versehen, so hat man:

$$U = u' - \Xi^2 - m'\Xi(\Xi + T) - m'^2(N + T)^2$$
$$U' = u' - \Xi'^2 - m'\Xi'(\Xi' + T) - m'^2(\Xi' + T)^2.$$

Aber zugleich ist nach §. 12.

$$u = u' - \xi'^2 - m'\xi'(\xi' + T) - m'^2(\xi' + T)^2.$$

Wenn man daher den Werth von u' aus dieser Gleichung einführt, hat man

$$U - u = (\xi' - \Xi)[(\xi' + \Xi)(1 + m' + m'^2) + m'(2m' + 1)T]$$
$$U' - u = (\xi' - \Xi')[(\xi' + \Xi')(1 + m' + m'^2) + m'(2m' + 1)T].$$

Trägt man die Werthe von ξ', Ξ, Ξ', T, m' ein, so ergiebt eine kleine Rechnung:

$$U - u = -\frac{1}{1-m^3}(\nu - mt)(\mu + m\nu + mt^2)$$

$$U' - u = -\frac{1}{1-m^3}(\mu - mt)(\nu + m\mu + m^2t^2).$$

Dieses sind aber nach §. 10. zwei Lösungen zweiter Classe in Bezug auf u, v, deren Beziehung zu der hier durch u', v' bezeichneten Lösung erster Classe leicht festzustellen ist. Vergleichen wir einen Tripel erster Classe (in Bezug auf u, v) mit einem Wendepuncte einer Curve dritter Ordnung, so ist ein System conjugirter Tripel, characterisirt durch m, t, μ, ν, einer Seite eines Wendepunktsdreiecks zu vergleichen, welche durch jenen Wendepunct geht; auf ihr liegen zwei Ecken von Wendepunktsdreiecken, welche den obigen Lösungen zweiter Classe entsprechen.

Wenn man statt einer Lösung u, v eine andere u', v' zum Ausgang nimmt, so bleiben vier Lösungen zweiter Classe der zweiten Classe angehörig. Sie entsprechen vier Ecken der Wendepunctsdreiecke, welche vier Seiten gegenüberliegen, die einen Wendepunkt gemein haben; und zwar denjenigen, dessen entsprechendes Tripel die Lösung u, v enthält. Es wird sich zeigen, dass auch solche vier Lösungen ein Quadrupel bilden (§. 12.), welches dann dem Quadrupel, zu welchem u, v und u', v' gehören, reciprok zugeordnet ist. Die 90 Quadrupel theilen sich demnach in 45 Paare, und die Auffindung der Quadrupel hängt also von einer Gleichung 45. Grades ab. Um aber dieses einzusehen, müssen wir einige Eigenschaften der Quadrupel noch genauer beleuchten.

§. 14.

Quadrupelpaare. Resolventen vom 45. und vom 27. Grade.

Es war oben (§. 9.) gezeigt worden, dass die einzelnen Lösungen dreier conjugirter Tripel einander stets fest zugeordnet sind. Bezeichnen wir, indem wir von u, v ausgehen, solche nach §. 9., ihrer Zuordnung entsprechend z. B. durch

$$1) \quad \ldots\ldots \quad \begin{matrix} 1_a & 1_b & 1_c \\ 2_a & 2_b & 2_c \\ 3_a & 3_b & 3_c, \end{matrix}$$

so werden die sechs Systeme (welche Determinantengliedern entsprechen, sobald man die neun obigen Zahlen als Elemente einer Determinante auffasst):

$$2) \quad . \quad . \quad \begin{matrix} 1_a, & 2_b, & 3_c \\ 1_b, & 2_c, & 3_a \\ 1_c, & 2_a, & 3_b \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1_a, & 2_c, & 3_b \\ 1_c, & 2_b, & 3_a \\ 1_b, & 2_a, & 3_c \end{matrix}$$

durch je eine von zwei Lösungen α, β zu Quadrupeln ergänzt, welche in Bezug auf u, v zweiter Classe sind, und welche den Ecken eines Wendepunctsdreiecks entsprechen, während die conjugirten Tripel auf die sie verbindende Seite eines Wendepunctsdreiecks führen (§. 13.). In der That, wird aus einer jener sechs Combinationen eine Lösung statt u, v zu Grunde gelegt, so bildet nach dem vorigen §. α oder β mit den übrigbleibenden ein Tripel, was das Kennzeichen eines Quadrupels ist. Sind die neun erstern Lösungen durch die Formeln 1—5, §. 9., ausgedrückt, so werden die beiden letzten durch die Formeln (vgl. §. 10. 8.)

$$3) \quad . \quad . \quad u' = -\frac{m}{1-m^3}(\mu^2 - \nu t), \qquad u'' = -\frac{m}{1-m^3}(\nu^2 - \mu t)$$

gegeben. Lassen wir m in εm und $\varepsilon^2 m$ übergehen, so werden die Lösungen 1. horizontal cyclisch permutirt, während u'^3 und u''^3 sich nicht ändern; zugleich gehen in 2. die drei ersten Gruppen in einander über und ebenso die letzten. Man hat also den Satz:

Schreibt man die Lösungen von 3 in Bezug auf u, v conjugirten Tripeln ihrer Zuordnung nach in das Schema einer Determinante, so werden diejenigen Verbindungen zu 3, die positiven Gliedern der Determinante entsprechen, durch ein und dieselbe Lösung zweiter Classe zu Quadrupeln ergänzt; ebenso die negativen Determinantengliedern entsprechenden durch eine andre.

Die 40 Lösungen bilden überhaupt $\frac{40 \cdot 39}{2} = 780$ Paare. Von diesen sind $\frac{40 \cdot 27}{2} = 540$ so beschaffen, dass eine Lösung des Paars in Bezug auf die andre erster Classe ist, und umgekehrt; die $\frac{40 \cdot 12}{2} = 240$ andern so, dass eine Lösung des Paars in Bezug auf die andre zweiter Classe ist, und umgekehrt.

Denken wir uns u, v zu Grunde gelegt, so gehören zur ersten Classe folgende Paare:

1. u, v verbunden mit seinen 27 Lösungen erster Classe, was 27 Paare giebt.

2. Je zwei Lösungen desselben Tripels, was $3.9 = 27$ Paare giebt.

3. Je zwei einander nicht zugeordnete Lösungen aus conjugirten Tripeln; $18.12 = 216$ Paare.

4. Eine Lösung zweiter Classe, einer Ecke eines Wendepunktsdreiecks entsprechend, und je eine Lösung erster Classe aus einem System conjugirter Tripel, das einer durch jene Ecke gehenden Wendepunktsseite entspricht; $12.2.9 = 216$ Paare.

Es bleiben noch $540 - 2.27 - 2.216 = 54$ Paare erster Classe zu suchen. In den obigen 486 Paaren kommt schon jede Lösung erster Classe 27mal vor, nämlich 1mal unter Nr. 1, 2mal unter Nr. 2, $4.4 =$ 16mal unter Nr. 3, $2.4 =$ 8mal unter Nr. 4. Die fehlenden 54 Paare erster Classe können also nur aus Lösungen zweiter Classe gebildet werden.

Die 12 Lösungen, welche in Bezug auf u, v der zweiten Classe angehören, bilden 66 Paare. Unter diesen sind 12, welche Ecken desselben, 54 welche Ecken verschiedener Dreiecke entsprechen. Nach dem vorigen §. treten zwei Lösungen zweiter Classe, welche Ecken desselben Dreiecks entsprechen, bei Zugrundelegung einer andern Lösung als zugeordnete Lösungen zweier Tripel auf, und stehen also zu einander in der gegenseitigen Beziehung von Lösungen zweiter Classe. Die andern 54 Paare stehen daher nothwendig in der Beziehung erster Classe, und man hat den Satz:

Zwei Lösungen zweiter Classe stehen zu einander in der gegenseitigen Beziehung von Lösungen zweiter oder erster Classe, je nachdem sie Ecken desselben Dreiecks oder Ecken verschiedener Dreiecke entsprechen.

Und es mag ferner der aus dem Vorigen von selbst hervorgehende Satz bemerkt werden:

Eine Lösung zweiter Classe steht in der Beziehung zweiter Classe zu demjenigen conjugirten System von neun Lösungen erster Classe, dessen Dreieckseite der Ecke der erstern gegenüberliegt.

Legt man eine Lösung zweiter Classe zu Grunde, so erkennt man leicht die Tripel erster Classe, welche sich dabei bilden. Nach dem am Eingange dieses §. gegebenen Satze erhält man $3.2 = 6$ Tripel aus dem Schema 2, und zwar aus den beiden frühern conjugirten Systemen,

deren Wendepunctsseiten durch die der bevorzugten Lösung zweiter Classe entsprechende Ecke gehen. Dabei sind 18 frühere Lösungen erster Classe benutzt; die 9 übrigen werden jetzt zweiter Classe, und die fehlenden 3 Tripel müssen also sich aus frühern Lösungen zweiter Classe zusammensetzen. Man kann aber aus den 11 übrigen Lösungen zweiter Classe in der That nur drei Systeme von je dreien ausscheiden, welche Tripel erster Classe werden können, d. h. deren drei Lösungen in der gegenseitigen Beziehung erster Classe stehen. Durch jede Ecke eines Wendepunctsdreiecks gehen 3 Gerade (harmonische Linien), welche je 3 weitere Ecken, und zwar so enthalten, dass die 4 Ecken einer Geraden den 4 verschiedenen Dreiecken angehören. Diesen 3 Systemen von je drei Ecken entsprechen die drei Systeme von Lösungen zweiter Classe, welche in der neuen Anordnung Tripel erster Classe werden.

Endlich ist es nun sehr leicht, die 90 Quadrupel anzugeben. Sie sind, nach der ersten Anordnung, folgende:

1. u, v mit einem Tripel erster Classe; 9 Quadrupel.

2. Je vier Lösungen zweiter Classe, welche den Dreiecksecken auf einer harmonischen Geraden entsprechen; 9 Quadrupel.

3. Je eine Lösung zweiter Classe mit drei einander nicht zugeordneten Lösungen aus conjugirten Tripeln erster Classe, deren Wendepunctsseite durch die der Lösung zweiter Classe zugehörige Ecke geht; $2.3.12 = 72$ Quadrupel.

Diese 90 Quadrupel bilden aber, indem sie paarweise einander zugeordnet sind, 45 Paare.

In der That ist jedem Quadrupel ein bestimmtes anderes (vgl. Ende des vorigen §.) so zugeordnet, dass jede Lösung des einen in Bezug auf jede Lösung des andern zweiter Classe ist. In dieser Weise entspricht bei der obigen Aufzählung der Quadrupel jedem Quadrupel unter Nr. 1 eines unter Nr. 2. Die unter Nr. 3 aufgeführten Quadrupel aber bilden 36 Paare. Wählen wir irgend eines der 72 Quadrupel Nr. 3 heraus, so ist es leicht das conjugirte zu finden, indem man nur beachtet, dass jede Lösung des einen in Bezug auf jede des andern von der zweiten Classe sein muss. Die in beiden vorkommenden Lösungen zweiter Classen müssen

also Ecken desselben Dreiecks entsprechen; die beiden Systeme von Lösungen erster Classe, welche in den Quadrupeln vorkommen, müssen also zwei conjugirten Systemen von Tripeln entnommen sein, welche Seiten desselben Dreiecks entsprechen. Ist das erste System gegeben, und enthält es Lösungen der Tripel i, k, h, so findet man das dazu gehörige System leicht, indem man das i^{te}, k^{te}, h^{te} Schema des §. 9. vergleicht, und diejenigen drei Lösungen aussucht, welche in diesen der jedesmal in dem Systeme gegebenen Lösung zugeordnet sind. So findet man z. B. zu 1_a, 2_b, 3_c die Lösungen 7_a, 8_a, 9_a; zu 1_a, 2_c, 3_c die Lösungen 4_a, 5_a, 6_a, u. s. w.

Die 90 Quadrupel führen also auf eine Resolvente 45. Grades, welche die gegebene Gleichung 40. Grades besitzt. Aber wie Hr. Jordan gezeigt hat, besitzt die Gleichung 45. Grades wiederum eine Resolvente 27. Grades, auf welche denn schliesslich alles zurückkommt. Die Existenz dieser Gleichung vom 27. Grade sieht man dadurch ein, dass man zeigt, *es sei auf* 27 *Arten möglich, die* 40 *Wurzeln in* 5 *Quadrupelpaare zu ordnen.*

Zunächst sieht man ein, dass bei jeder solchen Anordnung ein Quadrupelpaar vorkommen muss, welches die Lösung u, v enthält. Daher kann die Anordnung damit begonnen werden, dass man eines jener 9 Quadrupelpaare welche u, v enthalten benutzt, und die 32 übrigbleibenden Lösungen in 4 Quadrupelpaare vertheilt. Die übrigbleibenden 8 Lösungen zweiter Classe bilden dann in der That vier Paare von Dreiecksecken, und können also 4 Quadrupelpaaren angehören. Es sei das erste Quadrupelpaar etwa durch die Lösung u, v und durch die Lösung 1_a, 1_b, 1_c (§. 9.) gegeben. Zu beweisen ist, dass man die übrigen 4 Quadrupelpaare noch auf drei verschiedene Weisen wählen könne, so dass $9 . 3 = 27$ Anordnungen möglich sind. Man zeigt dies nun leicht mit Hülfe der Schemata des §. 9. Die vier übrigen Quadrupelpaare müssen die 24 übrigen Lösungen erster Classe, 2_a, 2_b, 2_c . . . 9_a, 9_b, 9_c so enthalten, dass in jedem Quadrupelpaar je eine Lösung aus 2 Systemen dreier conjugirter Tripel vorkommen, und dass solche zwei Systeme zwei Seiten eines Dreiecks entsprechen, dessen dritte Seite durch den dem Tripel 1. entsprechenden

Wendepunct geht. Also müssen diese Quadrupelpaare einzeln je eine Lösung aus den folgenden vier Paaren je zweier conjugirter Systeme enthalten:

4, 5, 6;	7, 8, 9
2, 5, 8;	3, 6, 9
2, 6, 7;	3, 4, 8
2, 4, 9;	3, 5, 7.

Man findet sofort, dass die Lösungen erster Classe für das erste dieser vier Quadrupelpaare noch auf drei Arten gewählt werden können, dass die der vier andern dann aber völlig bestimmt sind, wodurch alles bewiesen ist. Die drei so entstehenden Gruppen von Lösungen erster Classe, welche den vier Quadrupelpaaren angehören, sind folgende:

I.	II.	III.
4_a, 5_b, 6_c; 7_a, 8_c, 9_b.	4_b, 5_c, 6_a; 7_b, 8_a, 9_c.	4_c, 5_a, 6_b; 7_c, 8_b, 9_a.
2_a, 5_c, 8_b; 3_a, 6_b, 9_c.	2_b, 5_a, 8_c; 3_b, 6_c, 9_a	2_c, 5_b, 8_a; 3_c, 6_a, 9_b.
2_b, 6_a, 7_c; 3_b, 4_c, 8_a.	2_c, 6_b, 7_a; 3_c, 4_a, 8_b.	2_a, 6_c, 7_b; 3_a, 4_b, 8_c.
2_c, 4_b, 9_a; 3_c, 5_a, 7_b.	2_a, 4_c, 9_b; 3_a, 5_b, 7_c.	2_b, 6_a, 7_c; 3_b, 4_c, 8_a.

Die Reduction der gegebenen Gleichung vierzigsten Grades, zunächst auf eine des fünfundvierzigsten, dann auf eine des siebenundzwanzigsten Grades, ist durch diese Betrachtungen bewiesen. Es entsteht die Frage auf welche algebraische Probleme diese Reduction führt. Auf diese Untersuchung gedenke ich bei einer andern Gelegenheit zurück zu kommen.

Göttingen,
Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei.
W. Fr. Kaestner.